ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Научно-методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2023 года

МАТЕМАТИКА

Москва
2023

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ».

Авторы–составители: А.В. Семенов, М.А. Черняева.

Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике.

Методические материалы включают в себя описание экзаменационной работы 2023 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов участников экзамена с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

Основной государственный экзамен (ОГЭ) представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ основного общего образования соответствующим требованиям федерального государственного образовательного стандарта. Для указанных целей используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы.

ОГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 189/1513.

Содержание КИМ определяется на основе Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897) с учётом Примерной основной образовательной программы основного общего образования (одобрена решением Федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 08.04.2015 № 1/15)).

В КИМ обеспечена преемственность проверяемого содержания с Федеральным компонентом государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении Федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»).

Введение

Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике. Пособие состоит из трёх частей.

В первой части «Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ОГЭ с развёрнутым ответом. Математика» даётся краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2023 года по математике, характеризуются общие подходы к применению предложенных критериев оценки решений математических заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания решений и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

Во второй части «Материалы для самостоятельной работы экспертов» в целях организации самостоятельной и групповой работы экспертов приводятся примеры решений, которые эксперты должны по результатам коллективного обсуждения оценить в соответствии с критериями оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.

В третьей части «Материалы для проведения зачёта» приведены примеры решений заданий с развёрнутым ответом, предназначенные для проведения индивидуальных зачётных работ по проверке подготовки экспертов.

Каждое задание второй части КИМ ОГЭ по математике оценивается в 2 балла.

	Нумерация заданий						Общ. балл
Задание	№ 20	№ 21	№ 22	№ 23	№ 24	№ 25	
Максим. балл	2	2	2	2	2	2	12

Тематическая принадлежность заданий осталась в основном неизменной. А именно, в 2023 году, задание № 20 – упрощение алгебраических выражений, решение уравнений, решение систем уравнений, № 21 – решение текстовой задачи, № 22 – построение графика функции, № 23 – геометрическая задача на вычисление, № 24 – задача по геометрии на доказательство, № 25 – геометрическая задача высокого уровня сложности.

1. Характеристика экзаменационной работы 2023 года. Назначение заданий с развернутым ответом и их особенности

Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) разработаны с учётом положения, что результатом освоения основной образовательной программы основного общего образования должна стать математическая компетентность выпускников, т.е. они должны: овладеть специфическими для математики знаниями и видами деятельности; научиться преобразованию знания и его применению в учебных и внеучебных ситуациях; сформировать качества, присущие математическому мышлению, а также овладеть математической терминологией, ключевыми понятиями, методами и приёмами.

Работа состоит из двух частей, соответствующих проверке на базовом, повышенном и высоком уровнях.

При проверке базовой математической компетентности обучающиеся должны продемонстрировать: владение основными алгоритмами, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математической записью, применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять математические знания в простейших практических ситуациях.

Задания *части* 2 направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне. Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Эти части содержат задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа. Задания расположены по нарастанию трудности – от относительно более простых до сложных, предполагающих свободное владение материалом курса и хороший уровень математической культуры.

Все задания второй части экзаменационной работы носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение достаточно широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение математически грамотно записать решение.

Задания части 2 относятся к алгебре и геометрии. Задание 20 (алгебраическое), задание 23 (геометрическое) – наиболее простые. Они направлены на проверку владения формально-оперативными алгебраическими навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, систем, построение графика, и умению решить несложную геометрическую задачу на вычисление.

Задание 21 (алгебраическое), задание 24 (геометрическое) – более высокого уровня, они сложнее предыдущих и в техническом, и в логическом отношении.

И, наконец, задания 22 (алгебраическое), задание 25 (геометрическое) – высокого уровня сложности, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, математических кружков и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10–11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики, физики.

2. Общие подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение заданий 20–25 удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Результаты оценивания выполнения заданий фиксируются в протоколе проверки развернутых ответов[1].

Рисунок 1. Вариант формата бланка протокола проверки развернутых ответов

[1] Организационно-технологическая схема, используемая при проведении ОГЭ в субъектах Российской Федерации, может предполагать заполнение распечатки протокола проверки развернутых ответов или электронных форм аналогичного назначения.

Протокол проверки развернутых ответов

Регион 77 | Код предмета 2 | Название предмета Математика (2023.01.01) | Номер протокола 1000003

ФИО эксперта Эксперт Н.Т. | Код эксперта 300000

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																			
		20	21	22	23	24	25														
1	2020200002152																				
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					

Дата проверки - -

Подпись эксперта

Проект ABBYY TestReader 5.5 Network 5.5.1323.1253 <TT9_2021_new_krit> 04-12-2020

3. Примеры оценивания ответов по каждому типу заданий с развернутым ответом с комментариями.

Задача 20

Решите уравнение $x^4 = (4x-5)^2$.

Решение.

Исходное уравнение приводится к виду:

$$\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+4x-5\right)=0.$$

Уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет корней.

Уравнение $x^2+4x-5=0$ имеет корни -5 и 1.

Ответ: -5; 1.

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Сократите дробь $\dfrac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}$.

Решение.

$$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{(9\cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=\frac{3^{2n+6}\cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}}=3^{2n+6-(2n+5)}\cdot 2^{n+3-(n-2)}=3\cdot 2^5=96.$$

Ответ: 96.

Комментарий. Арифметическая ошибка – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения или деления. В критериях оценивания выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная арифметическая ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Пример оценивания решения задания 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

№: 20

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\overset{x-1}{\frac{3}{x-1}}-\overset{(x-1)^2}{10}=0$$

О.Д З.
$(x-1)^2\neq 0$
$x-1\neq 0$
$x\neq 1;$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$$

$$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$$

$$-10x^2+23x-12=0$$

$$D=b^2-4ac,\quad D=529-480=49=\pm 7^2$$

$$x_1=\frac{-23+7}{-20}=1{,}5\qquad x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=0{,}8$$

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$

Комментарий.

В решении записан верный ответ. Но в последних строках решения присутствуют:

а) ошибка в вычислении корня квадратного уравнения;

б) ошибка при сложении чисел с разными знаками;

в) ошибка в формуле корней квадратного уравнения;

г) ошибка при делении чисел с разными знаками.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 21

Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь. 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Решение.

Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 4 км/ч, при движении по течению равна 8 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}\right)$ часа. Из условия задачи следует, что это время равно 3 часам. Составим уравнение: $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=3$. Решив уравнение, получим $x=8$.

Ответ: 8 км.

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Комментарий. Арифметическая ошибка – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения или деления. В критериях оценивания выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная арифметическая ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

Задание 21 тематически сохраняется несколько лет. Критерии его оценивания не менялись.

Пример оценивания решения задания 21

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

21.

	v частей забора/ч	t ч	A частей забора
И+П	$\frac{1}{14}$	14	1
П+В	$\frac{1}{15}$	15	1
В+И	$\frac{1}{30}$	30	1

$$v(\text{И+П+П+В+В+И}) = \frac{1}{14} + \frac{1}{15}^{\backslash 2} + \frac{1}{30} = \frac{1}{14}^{\backslash 5} + \frac{1}{10}^{\backslash 7} = \frac{5+7}{70} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}\ (\text{ч.з./ч})$$

$$t = \frac{A}{v} = \frac{1}{\frac{6}{35}} = \frac{35}{6}\text{ч} = \frac{35\cdot 60^{10}}{6}\text{мин} = 350\text{ мин}$$

Ответ: 350

Комментарий.

Путь решения верный, но допущена вычислительная (арифметическая) ошибка.

Оценка эксперта: 1 балл.

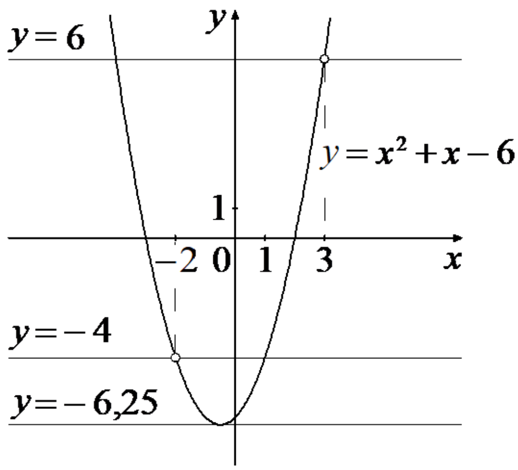
Задача 22

Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4-13x^2+36=\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

При $x\neq-2$ и $x\neq3$ функция принимает вид: $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2;-4)$ и $(3;6)$.



Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5;-6,25)$.

Поэтому $c=-6,25$, $c=-4$ или $c=6$.

Ответ: $c=-6,25$, $c=-4$, $c=6$.

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Комментарий. Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика. Верное построение графика включает в себя: масштаб, содержательная таблица значений или объяснение построения, ***выколотая точка обозначена в соответствии с ее координатами.***

Пример оценивания решения задания 22

Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

22 $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

1) $9x^2+x\neq 0$

$x(9x+1)\neq 0$

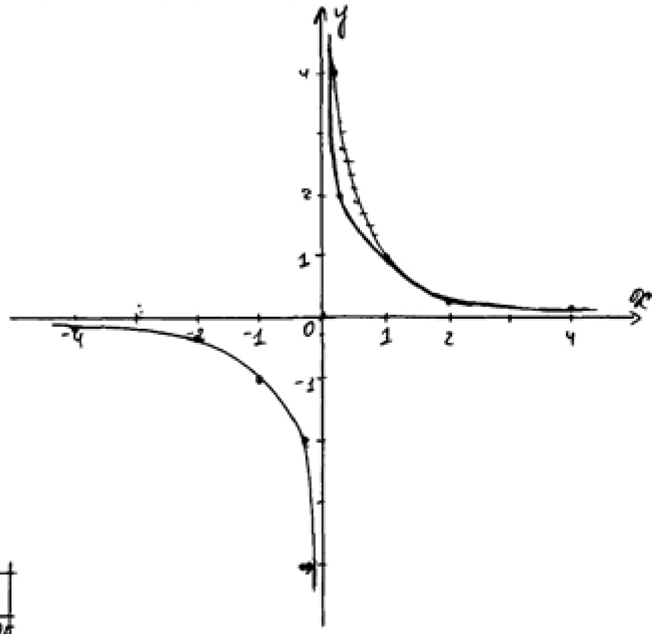
$\boxed{x\neq 0}$ $9x\neq -1$

$\boxed{x\neq -\frac{1}{9}}$

2) $y=\dfrac{\cancel{(9x+1)}}{x\cancel{(9x+1)}}$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	1	2	−1	−2	4	−4
y	1	0,5	−1	−0,5	0,25	−0,25



3) $\dfrac{kx}{1}=\dfrac{1}{x}$

$kx^2=1$ Если $y=1$, а $x^2=\left(-\frac{1}{9}\right)^2$, то:

$k\times\left(-\frac{1}{9}\right)^2=1$

$k\times\frac{1}{81}=1$

$\frac{k}{81}=\frac{1}{1}$

$k=81$ Ответ: при $k=81$

Комментарий.

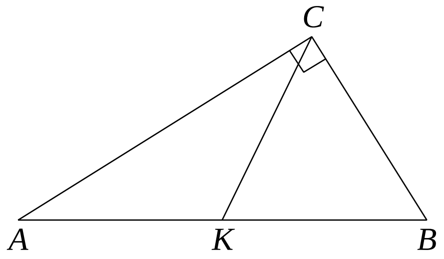
График построен неверно – отсутствует выколотая точка. В соответствии с критериями – 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 23

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.



$$CK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$

Ответ: 5.

Критерии оценивания выполнения задания 23

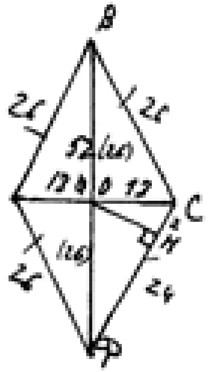
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Содержательно задание 23 практически не менялось в течение нескольких лет. Критерии его оценивания сохранились.

Пример оценивания решения задания 23

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Найти: ОН-?

Решение:

1) Т.к. ABCD - ромб ⇒ AB = CD = BC = DA = 26 см

2) По свойству катет AO, лежащий против ∠ 30° (∠ABO) равен $\frac{1}{2}$ AB (гипотенуза) ⇒ AO = 13 см. Т.к. AO = OC - диаг. ромба ⇒ AO = OC = 13 см

3). По свойству диагонали AC меньше BD в 2 раза ⇒ BD = 26·2 = 52 см

4) Рассм. △ OHD - прямоугольный; по Т Пифагора:

$26^2 = 24^2 + OH^2$

$676 = 576 + OH^2$

$OH^2 = 676 - 576$

$OH^2 = 100$

$OH = 10$

Ответ: OH = 10 см

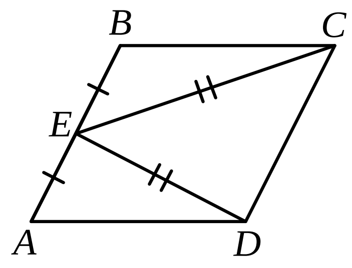
Комментарий.

Учащийся использует данные, которых нет в условии (считая острый угол ромба 60°).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 24

В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Доказательство.

Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам.

Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример оценивания решения задания 24

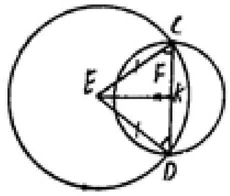
Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Дано:

окр (E); окр (F)

окр $(E) \cap$ окр $(F) = C$ и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

Проведём EC и ED — радиусы, тогда $EC = ED$.

$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к. $EC = ED$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle EDC = \angle ECD$,

$CK = KD \Rightarrow \triangle EKC = \triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).

Тогда $\angle CEK = \angle DEK \Rightarrow EK$ - биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой $\Rightarrow EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий.

Не доказано, что точка F лежит на высоте EK.

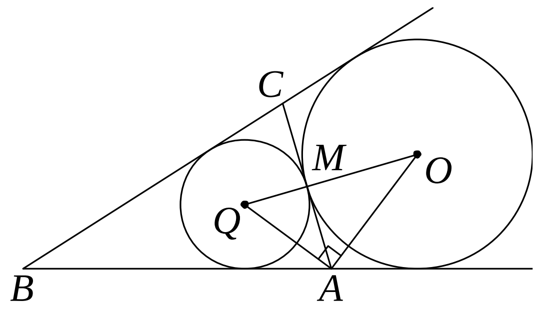
Оценка эксперта: 0 баллов.

Задача 25

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.



Точка касания M окружностей делит AC пополам.

Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой. Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Критерии оценивания выполнения задания 25

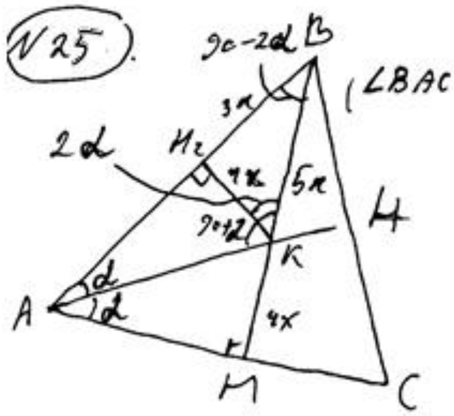
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример оценивания решения задания 25

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

№25.



(∠BAC=2α) опустим из K на AB высоту

она равна KH т/к AC биссект.

$\angle AKB = 90+\alpha$ как внеш K

$\Delta AKH \Rightarrow \angle ABK = 9-2\alpha \Rightarrow$

$\angle BKH = 2\alpha$ по Т пифагора

$H_2B = 3x \ (\sqrt{-4^2x^2+5^2x^2} = \sqrt{9x^2} = 3x) \Rightarrow$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

по Т синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R \Rightarrow$

$R = \frac{6}{\frac{6}{5}} = 5$

Ответ: $R = 5$

***Комментарий*.**

При правильном ответе решение содержит больше одной ошибки и описки.

Оценка эксперта: 0 баллов.

4. Материалы для практических занятий по оценке выполнения заданий с развернутым ответом

4.1. Задание 20

Пример 1.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3^{\,(x-1}}{x-1}-10^{\,(x-1)(x-1)}=0$; $\frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0$;

$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0$, если $x\neq 1$

$1+3x-3-10(x-1)^2=0$;

$-2+3x-10x^2+20x-10=0$;

$-10x^2+23x-12=0 \mid\cdot(-1)$;

$10x^2-23x+12=0$;

$D=b^2-4ac$; $D=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot10}=\frac{72}{20}=3{,}6$; $x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6}{20}^{(5}=-1{,}3$

Ответ: $-1{,}3$; $3{,}6$

***Комментарий*.**

При нахождении корней квадратного уравнения допущена ошибка. При наличии общей формулы для нахождения корней квадратного уравнения, записанной верно, не извлечен корень из дискриминанта при вычислении корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $0{,}5;\ -\frac{1}{6}$.

$\boxed{20}$ $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$

$1+4x-12x^2=0$ ОДЗ: $x\neq0$

$12x^2-4x-1=0$

$12x^2-6x+2x-1=0$

$(2x-1)(6x+1)=0$

$x=\frac{1}{2}=0{,}5 \lor x=-\frac{1}{6}$

Пр.: ✓ ✓

$\boxed{\text{Ответ: } 0{,}5;\ -\frac{1}{6}}$

Комментарий.

Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

20. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0 \qquad t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \; |(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+4\cdot\overbrace{1\cdot 10}^{40}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$

  $x=1{,}5$

- $x-1=-0{,}2$

  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Комментарий.

Все этапы решения присутствуют, корни в правом столбце найдены верно.

Оценка эксперта: 1 балл.

4.2. Задание 21

Пример 1.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.
2) Пусть производительность труда Игоря - x, Паши - y, а Володи - z
3) Тогда: производительность труда Игоря и Паши = $x+y=\frac{1}{20}$ (ч)
Паши и Володи - $y+z=\frac{1}{21}$ (часа)
Володи и Игоря - $z+x=\frac{1}{28}$ (часа)
4) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{20}-y$$
$$z=\frac{1}{21}-y$$
$$\frac{1}{20}-y+\frac{1}{21}-y=\frac{1}{28}$$
$$-2y=\frac{1}{28}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$
$$-2y=\frac{15-20-21}{420}$$
$$-2y=\frac{-26}{420}$$
$$y=\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{1}{20}-\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}$$
$$x=\frac{8}{420}$$
$$z=\frac{1}{21}-\frac{13}{420}$$
$$z=\frac{20}{420}-\frac{13}{420}$$
$$z=\frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков: $\frac{8}{420}+\frac{7}{420}+\frac{13}{420}=\frac{28}{420}$ - в час, а в минуту: $\frac{28}{420\cdot 60}$
6) Время за которое она выполнят работу:
$1:\frac{28}{420\cdot 60}=\frac{420\cdot 60}{28}=\frac{60\cdot 60}{4}=900$ минут
Ответ: за 900 минут мальчики прокрасят забор, работая втроём.

***Комментарий*.**

Ход решения верный, ответ верный.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

$И + П = 14$

$П + В = 15$

$В + И = 30$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{14} \\ y + z = \frac{1}{15} \\ z + x = \frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{1}{14} \\ y = \frac{1}{15} - z \\ x = \frac{1}{30} - z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15} - z + \frac{1}{30} - z = \frac{1}{14}$$

$$-2z + \frac{3}{30} = \frac{1}{14}$$

$$-2z = \frac{1}{14} - \frac{3}{30}$$

$$-2z = \frac{30 - 42}{420}$$

$$2z = \frac{12}{420}$$

$$z = \frac{12}{420} : 2 = \frac{12}{420} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{70}$$

$$y = \frac{1}{15} - \frac{1}{70} = \frac{70 - 15}{1050} = \frac{55}{1050}$$

$$x = \frac{1}{30} - \frac{1}{70} = \frac{70 - 30}{2100} = \frac{40}{2100} = \frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70} + \frac{55}{1050} + \frac{4}{210} = \frac{7}{210} + \frac{55}{1050} = \frac{1}{30} + \frac{55}{1050} = \frac{1050 + 1650}{31500} =$$

$$= \frac{2700}{31500} = \frac{27}{315} \text{ (ч)}$$

$$\frac{27}{315} \cdot \frac{60}{1} = \frac{1620}{315} = 5\frac{45}{315} = 5\frac{1}{7} \text{ (минут)}$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

***Комментарий*.**

Логическая ошибка – выпускник перепутал производительность и время.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

p	t	A
x+y	$\frac{1}{x+y}$	1
y+z	$\frac{1}{y+z}$	1
z+x	$\frac{1}{z+x}$	1

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=14 \\ \frac{1}{y+z}=15 \\ \frac{1}{z+x}=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{14}-x \\ \frac{1}{14}-x+\left(\frac{1}{30}-x\right)=\frac{1}{15} \quad (*) \\ z=\frac{1}{30}-x \end{cases}$$

$$* \quad \frac{1}{14}-x+\frac{1}{30}-x=\frac{1}{15}$$

$$-2x=\frac{1}{15}-\frac{1}{30}-\frac{1}{14}$$

$$-2x=\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{1}{7\cdot2}$$

$$-2x=\frac{14-7-15}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$-2x=\frac{-8}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$x=\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$y=\frac{1}{2\cdot7}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$z=\frac{1}{2\cdot3\cdot5}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}$$

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{\frac{4}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{11}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{18}=\frac{35}{2}=17.5 \text{ ч}$$

$= 1050$ мин

Ответ 1050 мин

Комментарий.

Вычислительная ошибка на последнем шаге.

Оценка эксперта: 1 балл.

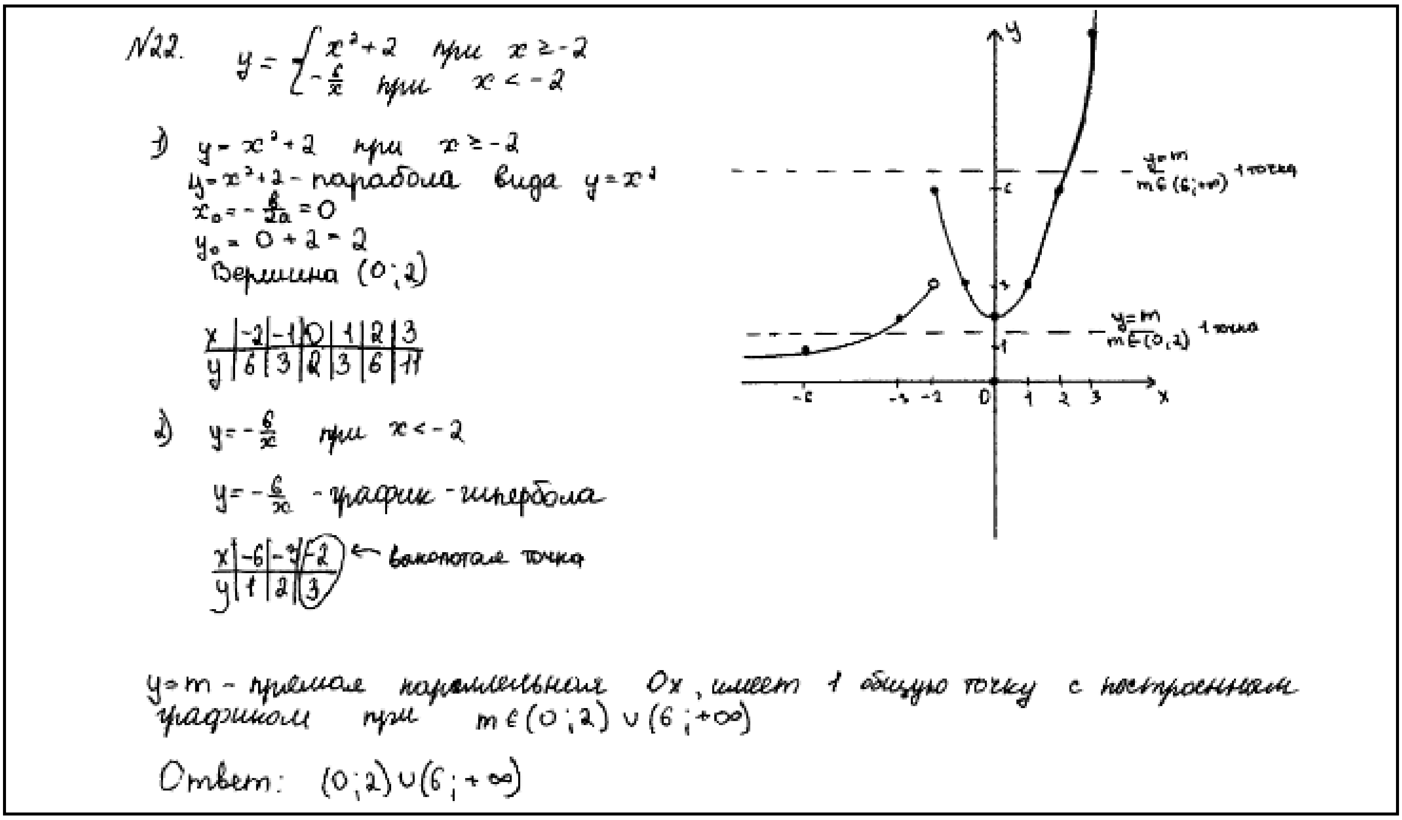
4.3. Задание 22

Пример 1.

Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2,\ m>6$.


№22. $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$

1) $y=x^2+2$ при $x \geq -2$

$y=x^2+2$ – парабола вида $y=x^2$

$x_0=-\frac{b}{2a}=0$

$y_0=0+2=2$

Вершина $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11

2) $y=-\frac{6}{x}$ при $x<-2$

$y=-\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

← выколотая точка

$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)\cup(6;+\infty)$

Комментарий.

График построен верно, верно найдены значение m.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0 < m < 2$, $m > 6$.

22.

$y = \begin{cases} x^2+2, & x \geq -2 \\ -\frac{6}{x}, & x < -2 \end{cases}$ – кусочно заданная функция с $D(y) = R$

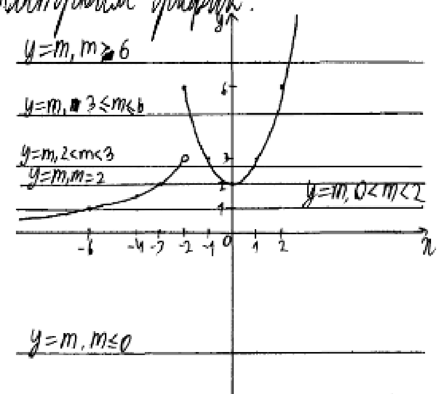
$y = x^2+2$ – квадратичная ф-уия, график – парабола с ветвями, направленными вверх и вершиной $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

$y = -\frac{6}{x}$ – ф-уия обратной пропорциональности, график – гипербола, расположенная в II и IV четвертях

x	-2	-3	-4	-6
y	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Построим график:



Прямая $y=m$ с графиком заданной ф-ции имеет: • 0 общих точек при $m \in (-\infty; 0]$
• 1 общую точку при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$
• 2 общие точки при $m \in \{2\} \cup [3;6]$
• 3 общие точки при $m \in (2;3)$

Ответ: $(0,2) \cup (6;+\infty)$

***Комментарий*.**

График построен верно, верно найдены значение m.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.

Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \ge -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

2.2. $y=\begin{cases} x^2+2, \text{ при } x \geqslant -2 \\ -\frac{6}{x}, \text{ при } x < -2 \end{cases}$

$y=x^2+2$ - Графиком является парабола, ветви направлены вверх

$y=-\frac{6}{x}$ Графиком является гипербола во $\underline{II}$ и $\underline{IV}$ четвертях

$y=x^2+2$

x	0	1	-1	2	-2	3
y	2	3	3	6	6	11

$y=-\frac{6}{x}$

x	[illegible]	-6	-3	-12
y	[illegible]	1	2	0,5

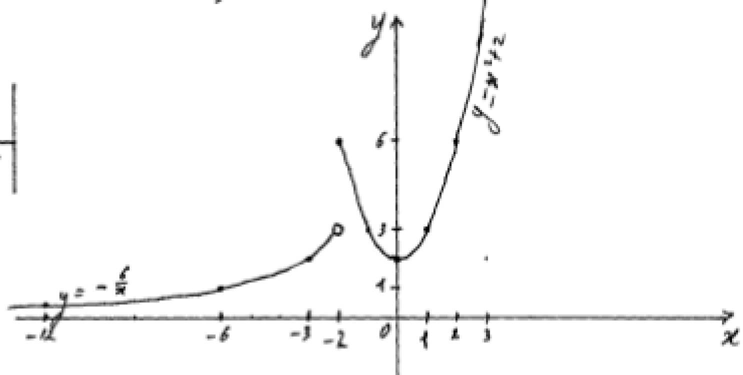


График $y=m$ имеет 1 общую точку при $m=(0;2)$; $(6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)$; $(6;+\infty)$

Комментарий.

Несмотря на описание, по данному рисунку нельзя судить о верности графика – нет никакой информации про точку разрыва.

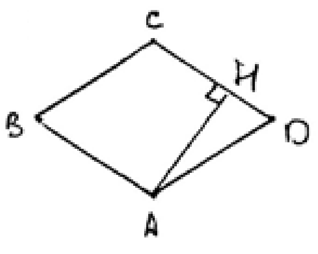
Оценка эксперта: 0 баллов.

4.4. Задание 23

Пример 1.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Дано:
ABCD - ромб
AH - высота
CH = 2
DH = 24
AH - ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны $CD = AD = CH + DH$

$AD = 26$

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на $\triangle AHD$)

$AH = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

***Комментарий*.**

Вычислительная ошибка при вычислении разности под знаком корня.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.

Дано:
ABCD - ромб
AH - высота
DH = 24
CH = 2

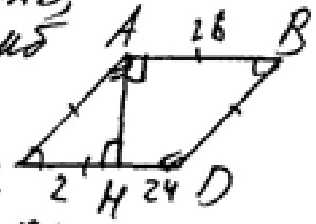
Найти: AH = ?

Решение:

CD = CA = BD = AB, т.к. ABCD - ромб

$\Downarrow$

CH + HD = 26



CD = AB = AC = BD = 26, ~~т.к.~~

~~CA~~ (по теор. Пифагора)

$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$

$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$

Ответ. $4\sqrt{42}$.

***Комментарий*.**

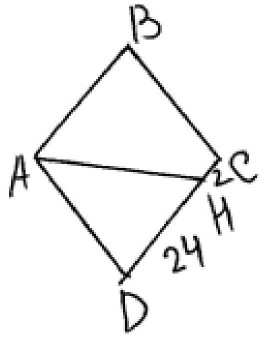
Учащийся решает свою задачу: не учтен порядок расположения отрезков.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Т.к. у ромба все стороны равны, то $AB = BC = CD = DA = 26$. Тогда $AH^2 = AD^2 - DH^2 =$
$= 676 - 576 = 100 = 10^2$.

Ответ: $AH = 10$.

Комментарий.

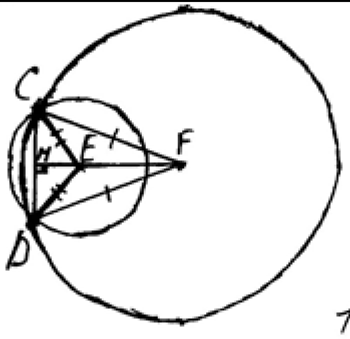
Задача выполнена верно, не смотря на изображение перпендикуляра *AH*.

Оценка эксперта: 2 балла.

4.5. Задание 24

Пример 1.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.



Дано: C и D - точки пересечения окружностей;
E и F по одну сторону от CD.
Док-ть: $CD \perp EF$

Док-во:

1) Проведём радиусы CE; ED; CF и FD.
2) Рассмотрим тр-к CDE. Радиусы равны => => тр-к равнобедренный.
3) Проведём медиану EM. В равнобедренном тр-нике медиана, проведённая к основанию явл. высотой => EM - высота.
4) Рассмотрим тр-к CFD. Радиусы равны => => тр-к равнобедренный => медиана, проведённая к основанию явл. высотой. => => FM - медиана и высота.
5) Высоты EM и FM лежат на одной прямой с отрезком FE; Основание CD лежит на прямой CD.
6) Так как высоты тр-ников $\perp$ к основанию CD и лежат на одной прямой с EF, то $EF \perp CD$.

ч.т.д.

***Комментарий*.**

Неточность в обосновании (см. пункт 5)

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 2.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Дано: окружность с центрам в точке E, окружность с центром в точке F, точки C, D- точки пересечения окружностей

Доказать: $EF \perp CD$

~~1) рассмотрим треугольник CFD.~~

2) Пусть пересечение EF и CD - H, а пересечение с окружностью

3) Так как центры окружностей находятся на одной прямой, CD их общая хорда, а ~~EF~~ FL - радиус одной из окружностей, то FH делит CD пополам.

4) Рассмотрим треугольник CFD, FH - медиана CD,

5) FD = FC, т.к. они являются радиусами окружности

6) следовательно △ CFD - равнобедренный, следовательно FH также является высотой, следовательно $EF \perp CD$

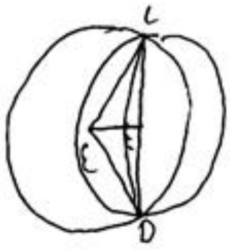
Комментарий.

Не доказано, почему FH делит CD пополам.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.



Дано: окр. ц. E, окр. ц. F
окр. пересекаются в C и D;
Док-ть: CD ⊥ EF

Док-во.

1). Проведем радиусы EC, ED, FC, FD
EC = ED (радиусы) => E равноудалено от C и D
FC = FD (радиусы) => F равноудалена от C и D
=> EF – сер. перпендикуляр к CD => EF ⊥ CD

***Комментарий*.**

Классическое доказательство данного факта.

Оценка эксперта: 2 баллов.

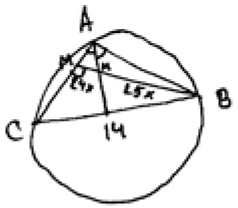
4.6. Задание 25

Пример 1.

Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. *BC* равно 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

Дано:
AH – биссектриса
$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$
$BC = 14$
Найти:
R



Решение:
AH – биссектриса (по условию)
$\Downarrow$
$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда
$AB = 25y$
$\Downarrow$
$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)
$\Downarrow$
$\sin\angle A = \frac{7}{25}$
$\Leftarrow$
$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$
$\Downarrow$
$R = 25$

Ответ: 25.

***Комментарий*.**

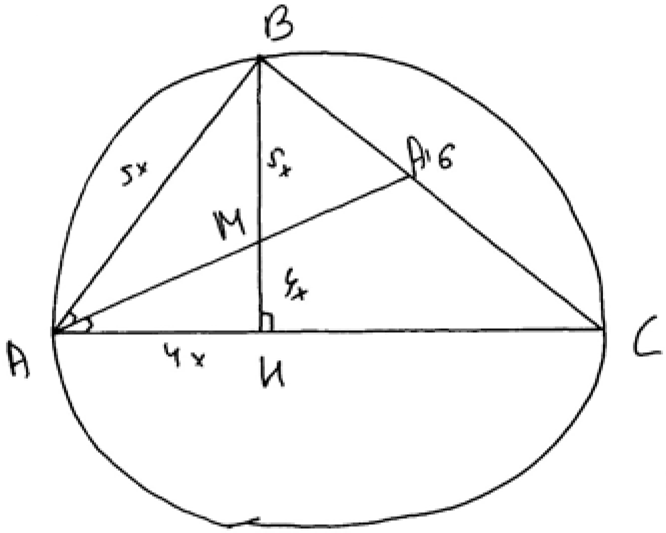
Решение верное.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.



Дано:
Окр(O;R)
△ABC
BC = 6
AA_1 – биссектриса
BH – высота.
BM:MH = 5:4.
Найти:
R

Решение:

$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sin A} = \frac{3}{\sin A}$.

1. Рассмотрим △ABH:

$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{9x}{AB} = \frac{9\cancel{x}}{5\cancel{x}} = 1{,}8$ (т.к. AM делит основание, в том же отношении, что и боковые стороны) ⇒

$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin A} = \frac{3}{1{,}8} = \cancel{1{,}67}\ 1\frac{2}{3}$

Ответ: $R = \cancel{1{,}67}\ 1\frac{2}{3}$.

Комментарий.

Логическая ошибка, неверно применено свойство биссектрисы.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. *BC* равно 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

Дано:
$\triangle ABC$
BH – высота
AD – биссектриса
$BC = 14$
$BO : OH = 25x : 24x$

R – ?

Решение:

1) $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BO}{OH} = \dfrac{24(y)}{25(y)}$ – свойство биссектрисы в $\triangle ABH$

2) $\triangle ABH$ – прямоугольный $\Rightarrow$
$\cancel{25y^2} = AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Пифагор) $\Rightarrow$
$25y^2 = 24y^2 + (49x)^2 \Rightarrow 49y^2 = (49x)^2 \Rightarrow y^2 = 49x^2 \Rightarrow y = 7x$

3) $\sin\angle BAH$ в $\triangle BAH = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{49x}{25y} = \dfrac{49x \cdot 7}{7x \cdot 25} = \dfrac{7}{25}$

4) $2R = \dfrac{BC}{\sin A}$ (следствие из теоремы синусов) $\Rightarrow$
$2R = \dfrac{14}{\frac{7}{25}} \Rightarrow 2R = 50 \Rightarrow R = 100$ Ответ: $R = 100$

***Комментарий*.**

Вычислительная ошибка.

Оценка эксперта: 1 балл.

Задание для самостоятельной работы экспертов.

Рекомендуется следующий порядок самостоятельной работы эксперта:

а) прочесть все решения одного задания подряд и составить свое предварительное мнение об оценках;

б) вернуться к началу и прочесть все решения еще раз, на этот раз выставляя свои собственные оценки, в соответствии с критериями оценивания;

в) после этого сверить свои оценки с предлагаемыми оценками в таблице ответов;

г) при наличии расхождений в оценках вернуться к спорным моментам и обдумать их, принять окончательное аргументированное решение.

Задание 20 с развернутым ответом повышенного уровня сложности для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0 \qquad y=\frac{1}{x-1} \quad (x \neq 1)$

$y^2+3y-10=0$; $D=9+40=49$; $x_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{2}$

$x_1=-5$; $x_2=2$

Ответ: 0,8; 1,5

1) $\frac{1}{x-1}=-5$

$1=-5x+5$

$x=\frac{4}{5}=0{,}8$

2) $\frac{1}{x-1}=2$

$1=2x-2$

$x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$x-1)$ $\quad x^2-2x+1$ $\quad (x-1)^2$

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0 \quad \Big|\cdot(x-1)^2$$

$$1+(x-3)-10x^2+20x-10$$

$$-10x^2+21x-12=0 \quad \Big|:(-1)$$

$$10x^2-21x+12=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=441-4\cdot(10)\cdot(12)$$

$$D=441-480=-39$$

Решения нет

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $0{,}5;\ -\frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0;\ \Big|\cdot x^2$$

$$x\neq 0$$

$$1+4x-12x^2=0;$$

$$12x^2-4x-1=0;$$

$$D_1=\cancel{\frac{4+12}{12}}=\frac{16}{12}= \qquad D_1=k^2-ac$$

$$D_1=4+12=16.$$

$D_1>0$, уравнение имеет 2 корня:

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$$

$$x=\frac{2\pm 4}{12}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-\frac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $0{,}5;\ -\frac{1}{6}$.

Оценка эксперта: ______________________

Задание 4.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}=10$$

$$\frac{1+3(x-1)}{(x-1)^2}=10$$

$$\frac{1+3x-3}{(x-1)^2}=10$$

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=10$$

$$3x-2=10(x^2-2x+1)$$

$$3x-2=10x^2-20x+10$$

$$10x^2-20x+10-3x+2=0$$

$$10x^2-23x+12=0$$

$D=b^2-4ac=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49>0\Rightarrow 2$ различных корня.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{23\pm7}{20}$$

$$\frac{23+7}{20}=\frac{30}{20}=1{,}5$$

$$\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0{,}8$$

Ответ: $x_1=0{,}8$

$x_2=1{,}5$.

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задания 20

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	1	0	2	2

Задание 21 с развернутым ответом повышенного уровня сложности для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

Пусть Игорь – x, Паша – y, Володя – z. Составим таблицу.

	v	t	A
x, y	$\frac{1}{20}$ з/ч.	20 ч	1 з.
y, z	$\frac{1}{21}$ з/ч	21 ч	1 з
x и z	$\frac{1}{28}$ з/ч	28 ч	1 з

Составим систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{20}-y \\ y=\frac{1}{21}-z \\ z=\frac{1}{28}-x \end{cases}$$

Составим и решим уравнение

$$x=\frac{1}{20}-\left(\frac{1}{21}-\left(\frac{1}{28}-x\right)\right)$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{1}{21}+\frac{1}{28}-x$$

$$2x=\frac{16}{420}$$

$$2x=\frac{4}{105}$$

$$x=\frac{2}{105}$$

Т.к. $y+z=\frac{1}{21}$, то

$$x+y+z=\frac{1}{21}+\frac{2}{105}.$$

$$x+y+z=\frac{7}{105} \text{ з/ч.}$$

$$t=\frac{A}{v}$$

$$t=\frac{1}{\frac{7}{105}}$$

$$t=15 \text{ ч}$$

Ответ: 15 часов.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

Буквами И, П и В я обозначил соответственно скорости Игоря, Паши и Володи (в $\frac{\text{заборов}}{\text{час}}$)

$И + П = \frac{1}{20}$; | $П + В = \frac{1}{21}$; | $В + И = \frac{1}{28}$;

$\Downarrow$

$20И + 20П = 1$; | $21П + 21В = 1$; | $28В + 28И = 1$;

$\Downarrow$

$20П = 1 - 20И$

$28И = 1 - 28В$

$\Downarrow$

$И = \frac{1}{28} - В$

$$20П = 1 - 20\left(\frac{1}{28} - В\right)$$
$$20П = 1 - \frac{5}{7} + 20В$$
$$20П = 20В + \frac{2}{7}$$

$\Downarrow$

$$П = В + \frac{1}{70}$$

$21П + 21В = 1$

$$21\left(В + \frac{1}{70}\right) + 21В = 1$$
$$21В + 21В = 1 - \frac{21}{70}$$
$$42В = 0{,}7$$
$$21В = 0{,}35$$

$\Downarrow$

$$21П = 1 - 0{,}35$$
$$21П = 0{,}65$$

$\Downarrow$

$$\frac{В}{П} = \frac{0{,}35}{0{,}65} = \frac{7}{13}$$

$3В = 0{,}05$

$3В = \frac{1}{20}$

$И + П = \frac{1}{20}$

$$И + П = 3В$$

Пусть $x = \frac{В}{7}$, тогда:

$П = 13x$; $21x = 0{,}05$

$$И + 13x = 3 \cdot 7x$$
$$И = 21x - 13x$$
$$И = 8x$$

$\Downarrow$

Скорость всех трех мальчиков вместе:

$$7x + 8x + 13x = 28x$$

$\Downarrow$

За три часа они покрасят:

$$84x = 21x \cdot 4 = 0{,}05 \cdot 4 = 0{,}2 \text{ (забора)}$$

$1 = 28x \cdot 15$

$\Downarrow$

Они покрасят забор за 15 ч

$15ч = 15 \cdot 60 = 900$ мин

Ответ: за 900 минут

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

$V_{ИП} = \frac{1}{14}$; $V_{ПВ} = \frac{1}{15}$; $V_{ВИ} = \frac{1}{30}$ – [illegible].

$\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \cancel{\frac{35}{6}}\ \frac{6}{35} \Rightarrow t = \frac{35}{6}$ ч – но это удвоенное время т.к. учли каждого дважды $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{35}{3}$ ч $= 11\frac{2}{3}$ (ч) $=$ 11 ч 40 мин

Ответ: 11 ч 40 мин. или 700 мин.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

	A	v	t
И + П.	1	$\frac{1}{20}$	20
П + В.	1	$\frac{1}{21}$	21.
В + И.	1	$\frac{1}{28}$	28
И + В + П.	1.	$\frac{1}{x}$	x

Составлю и решу уравнение:

1) $\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{x}$,

$\frac{21+20+15}{420} = \frac{1}{x}$,

$x(41+15) = 420 \cdot 1$,

$56x = 420$,

$x = \frac{420}{56} = 7,5$ (ч).

$$\begin{array}{r} \times 7,5 \\ 60 \\ \hline 450,0 \end{array}$$

2) 7,5 часов = 7,5 · 60 (мин.) = 450 (мин.).

Ответ: 450 минут.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 5.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

Пусть:

Игорь — t_1 - время Игоря

Паша — t_2 - время Паши

Володя — t_3 - время Володи

$t_1+t_2=20$

$t_2+t_3=21$

$t_1+t_3=28$

1) $t_2=20-t_1$

$20-t_1+t_3=21$ $\quad t_3=1+t_1$

$t_1+1+t_1=28$

$2t_1=27$

$t_1=13,5$, тогда

$t_2=6,5$

$t_3=14,5$

2) Тогда $14,5+6,5+13,5=34,5$

3). Т.к. они работают втроем $34,5:3=11,5$

11,5 часов = 690 минут

Ответ: 690 минут = 11,5 часов

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задания 21

Задание	1	2	3	4	5
Оценка эксперта	1	2	0	0	0

Задание 22 с развернутым ответом повышенного уровня сложности для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x\geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x<-2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

Задание 22

$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x\geq -2 \quad (1) \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при } x<-2 \quad (2) \end{cases}$

1) $y=x^2+2$ – парабола, ветви напр. вверх.

$x\geq -2$

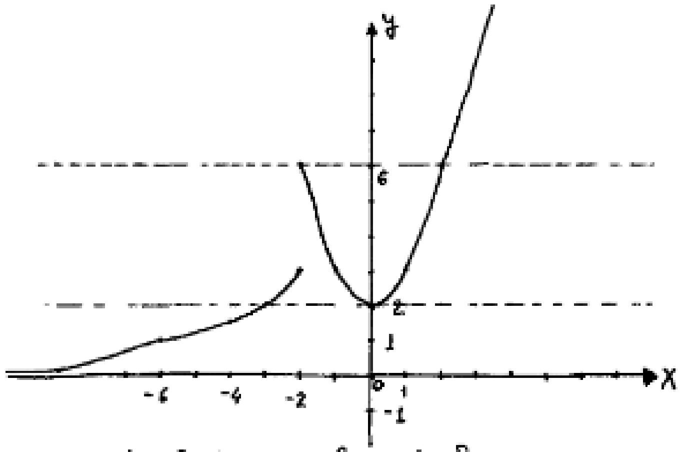
$x_0=0$ $\quad x=-2$ $\quad x=-1$

$y_0=2$ $\quad y=6$ $\quad y=3$

2) $y=-\dfrac{6}{x}$ – гипербола

$x<-2$

x	-6	-4	-3	-2
y	1	1,5	2	3



$y=m$ имеет с графиком ровно 1 общую точку при $0<m<2$ и $m>6$

Ответ: $0<m<2$ и $m>6$; $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

Ответ может быть записан разными способами

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0 < m < 2$, $m > 6$.

$y = \begin{cases} x^2+2, \ x \geq -2 \\ -\frac{6}{x}, \text{при } x < -2, \end{cases}$

1) $x \geq -2$

$y = x^2+2$ - квадратич функция, график - парабола, ветви - ↑.

$x_0 = 0$ $y_0 = 2$ $F(-2) = 6$

2) $x < -2$

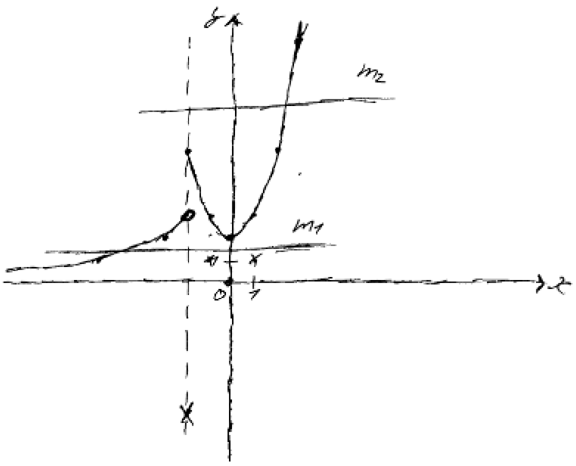
$y = -\frac{6}{x}$ - обратная пропорциональность, график - гипербола.

$F(-2) = 3$

3) $y = m$ (ровно одна общая точка).

$m_1 = (0, 2)$

$m_2 = (6, +\infty)$.



Ответ: $(0; 2) \cup (6; +\infty)$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x\ge -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x<-2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2,\ m>6$.

№22.

$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x\geqslant -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x< -2. \end{cases}$

I $y=x^2+2$ – квадратичная функция, график – парабола, $a>0$, ветви направлены вверх

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = 0$

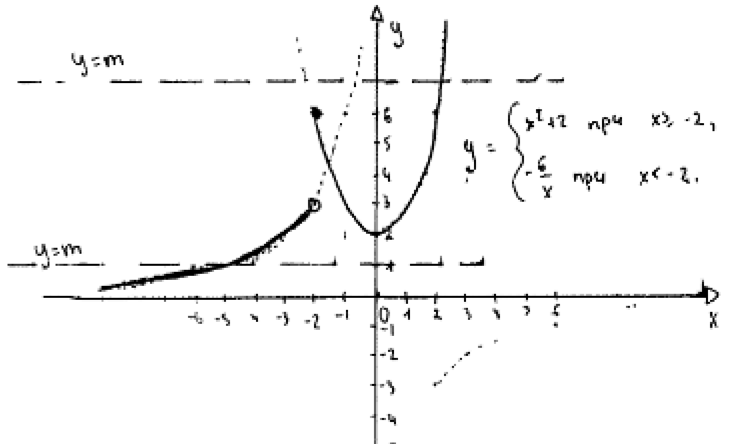
$y_0 = 0+2 = 2$

O (0; 2)

x	0	2	-2
y	2	6	6

II $y = -\dfrac{6}{x}$ – функция обратной пропорциональности, график – гипербола, симметрично отражённая относительно оси абсцисс

x	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
y	-6	6	-3	3	-2	2	-1	1



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m \in (0,2)\cup(6;+\infty)$

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0 < m < 2$, $m > 6$.

$y = f(x)$

$f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{ при } x \geq -2 \\ -\dfrac{6}{x}, \text{ при } x < -2 \end{cases}$

$y = x^2+2$ – график – парабола, ветвями вверх т.к. коэффициент перед x^2 равен $1 > 0$.

$x_в = -\frac{0}{2} = 0$ ось параболы: $x = 0$ (ось OY)

$y_в = 0^2+2 = 2$

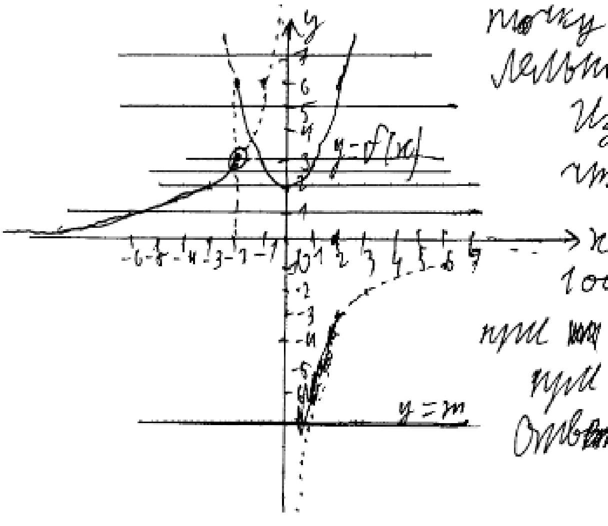
x	1	-1	2	-2
y	3	3	6	6

$y = -\frac{6}{x}$ – график – гипербола, расположенная в II и IV координатных четвертях.

x	1	2	3	-1	-2	-3
y	-6	-3	-2	6	3	2

Графиком функции $y = f(x)$ является часть графика $y = x^2+2$ при $x \geq -2$ и часть графика $y = -\frac{6}{x}$ при $x < -2$. Построим график данной функции

$y = m$ – график – прямая, проходящая через точку $(0;m)$ и параллельная оси OX.



Из графика видно, что $y = m$ имеет с $y = f(x)$ ровно 1 общую точку при $0 < m < 2$ или при $m > 6$

Ответ: $(0;2) \cup (6;+\infty)$.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 5.

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: $0 < m < 2$, $m > 6$.

$y = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$ $y = m$ имеет 1 общ. точку

① $y = x^2 + 2$ – квадратичная функция, график ~~часть~~ парабола, ветви вверх

1.1. Вершина: $x_в = -\frac{b}{2a}$; $x_в = \frac{0}{2} = 0$; $y_в = 2$

1.2. Нули:

$x^2 + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 2 = -8$, $D < 0$, корней не имеет

1.3. $Oy(0)$: 2

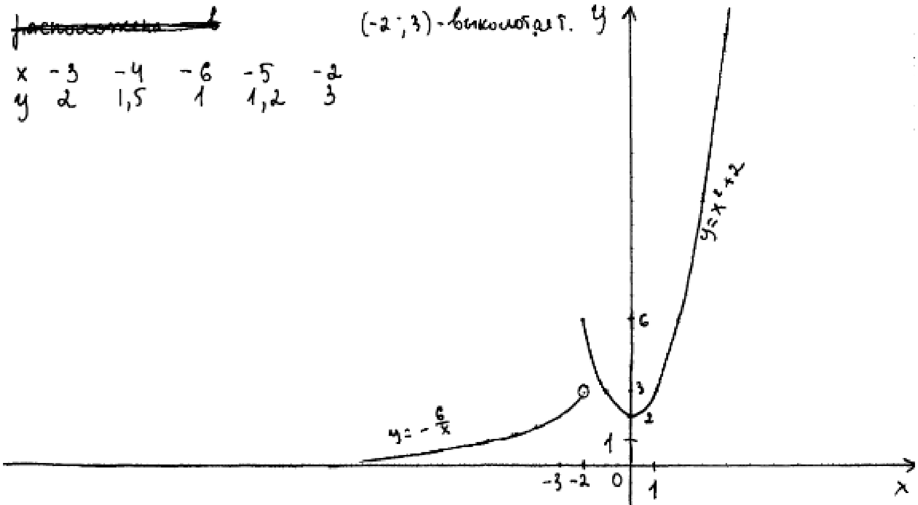
x	0	1	-2	-1	3	4
y	2	3	6	3	11	18

② $y = -\frac{6}{x}$ – обратная пропорциональность, график гипербола,

~~расположена~~

(-2; 3) - выколотая т.

x	-3	-4	-6	-5	-2
y	2	1,5	1	1,2	3



$y = m$ имеет одну общую точку

при ~~m = 2~~ $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$

Ответ: $m \in (0; 2) \cup (6; +\infty)$

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задание 22

Задание	1	2	3	4	5
Оценка эксперта	0	0	0	2	1

Задание 23 с развернутым ответом повышенного уровня сложности для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

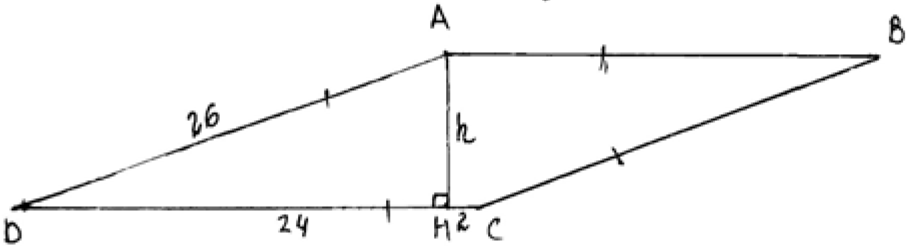
Ответ: 10.

1) Т.к $DA=DC$ ($ABCD$-ромб) $\Rightarrow DA=24+2=26$

2) По теореме Пифагора $AH^2=DA^2-AH^2=100 \Rightarrow AH=10$

Ответ: 10

Чертёж

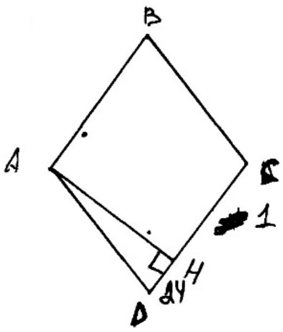


Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



1). Т.к. $ABCD$-ромб, у него все стороны равны $\Rightarrow AB=BD=DC=AC$

2). Зная, что $DH=24$, а $CH=1$, мы найдем сторону CD, $CD=DH+HC=24+1=25$

$\Rightarrow AB=BD=DC=AC=25$

3). $\triangle AHC$ – прямоугольный, $\angle H=90°$, т.к. AH – высота

4). По теореме Пифагора находим катет AH

$AD^2=DH^2+AH^2$, отсюда выразим AH

$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{625-576}=\sqrt{49}=\pm 7$

$-7<0$, не подходит

$AH=7$

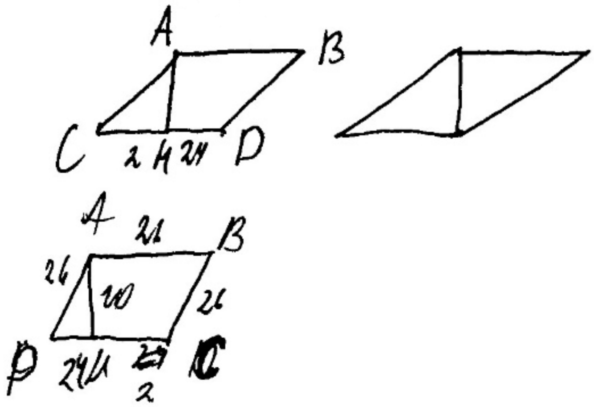
Ответ: 7

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



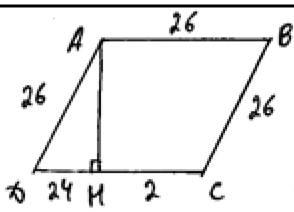
Ответ: 10.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



1) ABCD – ромб ⇒ $AB = BC = CD = AD = 24 + 2 = 26$

2) AH – высота ⇒ $\angle AHD = 90^\circ$, ΔAHD – прямоуг.

3) По теореме Пифагора: $AH^2 = AD^2 - DH^2$

$AH^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100$

$AH = \left[\begin{array}{l} 10 \\ -10 \text{ – не подходит по смыслу} \end{array}\right.$

Ответ: $AH = 10$

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задания 23

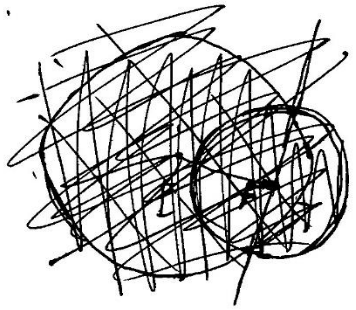
Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	2	1	0	2

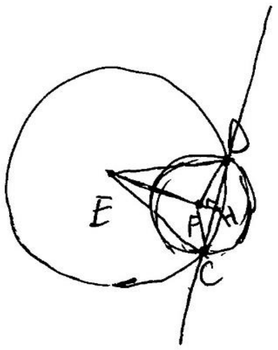
Задание 24 с развернутым ответом повышенного уровня сложности для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, центры *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *EF*.

Дано: окружности с центрами E и F, пересекаются в точках C и D; E, F лежат по одну сторону от прямой CD
Док-ть: $CD \perp EF$
Решение:



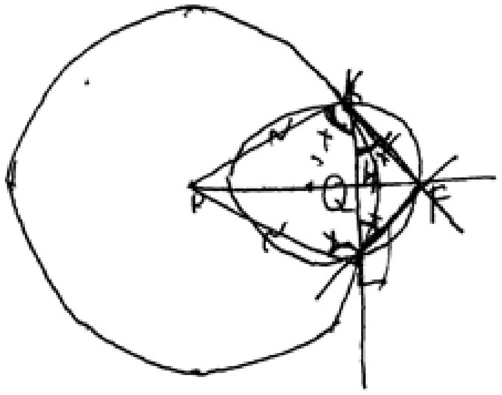


$\triangle CED$ и $\triangle CFD$ - равнобедренные т.к. EC, ED, FD, FC - радиусы
CD - хорда
Проведём высоту EH и FH к прямой CD
EH и FH - расстояние от центра до хорды образует прямой угол и является медианой.
~~...~~ $\triangle ECD$ и $\triangle CFD$ равнобедренные и $\angle CED$ и $\angle CFD$ опираются на одну и туже дугу
EH - серединный перпендикуляр. точка F лежит на серединном перпендикуляре и равноудалена от концов хорды. Т.к. F лежит на EH и образует с CD 90° $CD \perp EF$ ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.



1) Рассмотрю ΔPKL - он р/б по определению т.к. $PK = PL$ как радиусы окружности с центром P => по св-ву р/б тр-ка $\angle PKL = \angle PLK$
2) Провожу $LF \parallel PK$, $KF \parallel PL$
Зная $\angle PKL = \angle KLF$ как накр/леж при пар. прямых PK и LF и сек KL =>
=> $\angle KLF = \angle PLK$ => LQ - бис-са ΔPLK
$\angle LKF = \angle PLK$ => $\angle LKF = \angle PKL = \angle LKF$ => ΔKFL - р/б по св-ву.
3) $\Delta PKF = \Delta PLF$ по 3 сторонам:
- $PK = PL$ как радиусы
- $KF = LF$ (пункт 2)
- PF - общая

=> $\angle KPF = \angle LPF$

4) Из п.3 следует, что PH - бис-са ΔPKL. Из п.1 - ΔPKL - р/б. по св-ву р/б тр-ка биссектриса проведенная к основанию, является высотой =>
=> $\angle PHK = 90°$, а по условию $Q \in PH$ => $PQ \perp KL$, ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Дано:

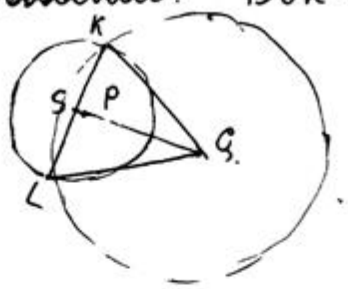
окр $(P; R_1)$

окр $(Q; R_2)$

Док-ть

$PQ \perp KL$

~~Решение~~: Док-во:

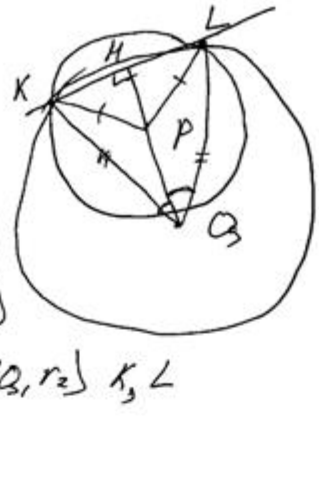


1. Проведем $KQ = LQ$ - радиусы окр.
$\triangle KQL$ - р/б. т.к. $KQ = LQ \Rightarrow$
$\angle LKQ = \angle KLQ$.
2. Доведем QP до отрезка KL
3. т.к (·)P - центр окр (·)K и (·)L равноудалены от нее (радиусы). Точка P лежит на отрезке $QS \Rightarrow$
(·)K и (·)L равноудалены от (·)S. $\Rightarrow$
$KS = SL \Rightarrow QS$ - медиана.
4. В равнобедренном $\triangle$ медиана = высоте и биссектрисе $\Rightarrow QS$ - высота $QS \perp KL$ - основанию.
QP лежит на $QS \Rightarrow QP \perp KL$.
Ч.Т.Д.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.



Дано: окр. (P, r_1)

окр. (Q, r_2)

окр. $(P, r_1) \cup$ окр. (Q, r_2) K, L

Рассмотрим

$\triangle KQL$ и $\triangle KPL$

проведем KQ и QL,

затем KP и PL

$$\left.\begin{cases} KQ = QL \text{ как радиусы} \\ KP = PL \text{ как радиусы} \\ PQ \text{ - общая сторона} \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle KPQ = \triangle QPL$$

$\angle KQP = \angle PQL$ как соответствующие элементы.

Следовательно QH- биссектриса

Т.к $KQ = QL$, $\triangle KQL$ - равнобедренный. По св-ву равнобедренного треугольника биссектриса, проведенная к основанию, является высотой

ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задания 24

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	0	1	0	2

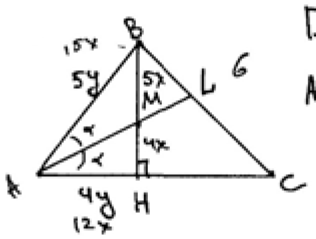
Задание 25 с развернутым ответом высокого уровня сложности

для самостоятельной работы экспертов.

Задание 1.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.



Дано:

ABC - △

BH - h

AL - ℓ

AL ∩ BH = т.M

BM : MH = 5:4

BC = 6

R - ?

Решение:

По Т. о биссектрисе в △ABH AM - ℓ

$\frac{AB}{AH} = \frac{BM}{MH} = \frac{5}{4}$.

по Т. Пифагора

В △ABH, △ABH - п/у ∠H = 90.

$AB^2 = BH^2 + AH^2$

$25y^2 = 16y^2 + 81x^2$

$9y^2 = 81x^2$

$3y = 9x$

$y = 3x$.

$\sin\angle A = \frac{BH}{AH} = \frac{9x}{15x} = 0{,}6$

По Т. sin

$2R = \frac{BC}{\sin\angle}$

$2R = \frac{6}{0{,}6}$

$2R = 10$

$R = 5$

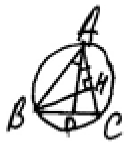
Ответ: 5

Оценка эксперта: ____________________

Задание 2.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.



Дано: AD-бис. $\angle A$; BH-выс.; $\frac{BO}{OH} = \frac{5}{4}$

$BC = 6$ Найти: R-?

Решение:

1) по свойству биссектрисы треугольника: $\frac{BO}{OH} = \frac{AB}{AH} = \frac{5}{4}$; но также по свойству высоты (как среднее пропорциональное) получаем, что $\frac{BC}{HC} = \frac{5}{4}$

2) пусть x – 1 часть

$\frac{BC}{HC} = \frac{5}{4}$ $\quad \frac{6}{HC} = \frac{5x}{4x}$ $\quad HC = \frac{6 \cdot 4x}{5x} = \frac{24}{5} = 4{,}8$

3) ΔBHC ($\angle H = 90^\circ$): по теореме Пифагора: $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$BH^2 = 6^2 - 4{,}8^2$ $\quad BH^2 = (6-4{,}8)(6+4{,}8) = 1{,}2 \cdot 10{,}8$ $\quad BH = 3{,}6$

4) ΔAHB ($\angle H = 90^\circ$): по теореме Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$25x^2 = 16x^2 + 12{,}96$ $\quad 9x^2 = 12{,}96$ $\quad x^2 = 1{,}44$ $\quad x = 1{,}2$ - 1 часть

$AB = 1{,}2 \cdot 5 = 6$

5) по теореме синусов: $2R = \frac{AB}{\sin\angle H}$; $2R = \frac{6}{1}$

$2R = 6$ $\quad R = 3$

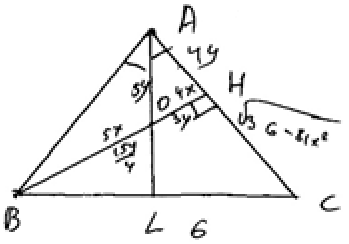
Ответ: $R = 3$.

Оценка эксперта: ____________________

Задание 3.

Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. *BC* равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.



Дано: $\triangle ABC$ AL – биссектриса $S=\frac{abc}{4R}$

$\frac{BO}{OH}=\frac{5}{4}$ Найти: R

$BC=6$

Пусть x – 1 часть $OH=4x$, $BO=5x$

$HC=\sqrt{36-81x^2}$

$\triangle AOB \sim \triangle AOH$ (2 признак)

$\frac{AO}{AH}=\frac{BO}{OH}=\frac{AB}{AO}$

$\frac{AO}{AH}=\frac{5}{4}=\frac{AB}{AO}$ y – часть $AO=5y$ $AH=4y$

$AO^2=AB\cdot AH$

$\sqrt{36-81x^2}=$
$=\sqrt{36-81\cdot\frac{9y^2}{16}}$

$(4y)^2+(4x)^2=(5y)^2$

$16y^2+16x^2=25y^2$

$16x^2=9y^2$

$x^2=\frac{9y^2}{16}$

$x=\sqrt{\frac{9y^2}{16}}=\frac{3y}{4}$

$BO=5\cdot\frac{3y}{4}=\frac{15y}{4}$

$OH=\cancel{4}\cdot\frac{3y}{\cancel{4}}=3y$

$\left(3y+\frac{15y}{4}\right)^2+\cancel{36}-\frac{81\cdot 9y^2}{16}=\cancel{36}$

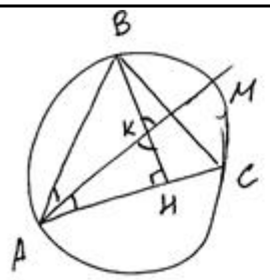
$\left(3y+\frac{15y}{4}\right)^2=\frac{81\cdot 9y^2}{16}$,

Оценка эксперта: ____________________

Задание 4.

Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. *BC* равно 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.



Решение

1) ∠BKM опирается на ту же дугу что и ∠BAM, значит

∠BKM = ∠BAM

2) ∠BKM = ∠AKH, как вертикальные углы

∠BKM = ∠BAM = ∠MAC

Дано
△ABC
AM - биссектриса
BH - высота
BK : KH = 25 : 24
BC = 14

R - ?

3) Рассмотрим △AKH:

∠AHB = 90° - прямой, т.к. BH - высота к AC.

∠KAH = ∠AKH (по ②.), то

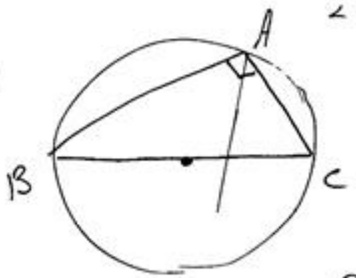
∠KAC = 45°

4) ∠BAC = ∠BAM + ∠MAC

∠MAC = 45° = ∠BAM, то

∠BAC = 45° + 45° = 90°

5)



∠BAC = 90°, то

BC = d = 2R = 14

R = 7

Ответ: 7

Оценка эксперта: ____________________

Оценивание задания 25

Задание	1	2	3	4
Оценка эксперта	2	0	0	0

5. Тренировочные варианты

Вариант 1

№ 1. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$.

Ответ: $0{,}5;\ -\frac{1}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$$

$$\frac{1}{x}=t$$

$$t^2+4t-12=0$$

$$D=16+48=64$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-4+8}{2}=2 \\ t=\frac{-4-8}{2}=-6 \end{array}\right.$$

$\frac{1}{x}=2$ или $\frac{1}{x}=-6$

$x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{6}$

Ответ: $(-\frac{1}{6};\ \frac{1}{2})$

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 2. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$, домножим на $-(x-1)^2$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 10\cdot(x-1)^2-3(x-1)-1=0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x\neq 1 \\ 10x^2-23x+12=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$10x^2-15x-(8x-12)=0$; $x\neq 1$

$\Updownarrow$

$5x(2x-3)-4(2x-3)=0$; $x\neq 1$

$\Updownarrow$

$(5x-4)(2x-3)=0$; $x\neq 1$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0{,}8 \\ x=1{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}8 \\ x=1{,}5 \end{array}\right.$

Ответ: $\{0{,}8;\ 1{,}5\}$

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 3. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}^{\backslash 1}+\frac{3}{x-1}^{\backslash x-1}=10$$

$$\frac{1+3(x-1)}{(x-1)^2}=10$$

$$\frac{1+3x-3}{(x-1)^2}=10$$

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=10$$

$$3x-2=10(x^2-2x+1)$$

$$3x-2=10x^2-20x+10$$

$$10x^2-20x+10-3x+2=0$$

$$10x^2-23x+12=0$$

$D=b^2-4ac=529-4\cdot10\cdot12=529-480=49>0\Rightarrow 2$ различных корня.

$$x_{1,2}=-\frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{23\pm7}{20}$$

$$\frac{23+7}{20}=\frac{3\cancel{0}}{2\cancel{0}}=1{,}5$$

$$\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0{,}8$$

Ответ: $x_1=0{,}8$

$x_2=1{,}5$.

Оценка эксперта: ______________________

Комментарий: ______________________

№ 4. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пусть произв. Игоря = $\frac{1}{x}$ р/ч, Паши = $\frac{1}{y}$ р/ч, Володи $\frac{1}{z}$ р/ч,

тогда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{21}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{28}$ р/ч.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=???$

Сложив 3 ~~уравнения~~ равенства получим

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{21}{420}+\frac{20}{420}+\frac{15}{420}$ $\quad \frac{56}{420}=\frac{2}{15}$

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2}{15}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$ за час они втроем сделают $\frac{1}{15}$ работы

Значит все они выполнят за 15 часов.

Ответ: 15ч.

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 5. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

Пусть x заборов/ч – производительность (скорость покраски) Паши, y з/ч – Игоря, а z з/ч – Володи. Тогда $\frac{1}{x+y}$ ч – время покраски забора Пашей и Игорем, $\frac{1}{x+z}$ ч – Пашей и Володей, $\frac{1}{y+z}$ ч – Игорем и Володей. А по условию задачи эти времена равны соответственно 14ч, 15ч и 30ч. Составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 14 \\ \frac{1}{x+z} = 15 \\ \frac{1}{y+z} = 30 \end{cases}$$

1) $\frac{1}{x+y} = 14$

$$\begin{cases} x+y \neq 0. \\ x+y = \frac{1}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y \neq 0. \\ y = \frac{1}{14} - x \end{cases}$$

2) $\frac{1}{x+z} = 15$

$$\begin{cases} x+z \neq 0 \\ x+z = \frac{1}{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z \neq 0 \\ z = \frac{1}{15} - x \end{cases}$$

3) $\frac{1}{y+z} = 30$

$$\begin{cases} y+z \neq 0 \\ y+z = \frac{1}{30} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{14}^{\backslash 15} - x + \frac{1}{15}^{\backslash 14} - x \neq 0. \\ \frac{1}{14}^{\backslash 15} - x + \frac{1}{15}^{\backslash 14} - x = \frac{1}{30}^{\backslash 7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{29}{210} \neq 2x \\ 2x = \frac{29}{210} - \frac{7}{210} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{29}{420} \\ x = \frac{22}{420} \end{cases}$$

$x = \frac{11}{210}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{14}^{\backslash 15} - \frac{11}{210} = \frac{4}{210} = \frac{2}{105}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{15}^{\backslash 14} - \frac{11}{210} = \frac{3}{210} = \frac{1}{70}$

4) $\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{\frac{11}{210} + \frac{2}{105} + \frac{1}{70}} = \frac{1}{\frac{11}{210} + \frac{4}{210} + \frac{3}{210}} = \frac{1}{\frac{18}{210}} =$

$= \frac{210}{18} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ ч $= 11$ч 40мин

(время покраски забора, если бы все 3 мальчика работали вместе)

Ответ: $11\frac{2}{3}$ч

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 6. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

Пусть Паша красит за 1 час X часть забора, Тогда Володя красит за 1 час Y часть забора, а Игорь – Z часть забора.

Паша и Володя красят за час ~~Z~~+Y часть забора, Володя и Игорь – Z+X, а Игорь и Паша – X+Y.

Тогда за 20 часов П. и И. красят весь забор: $1=20(x+y)$ За 21 час весь забор закрашивают Паша и Володя: $1=21(y+z)$. а В. и И. за 28 часов: $1=28(z+x)$

$$\begin{cases} 20(x+y)=1 \\ 21(y+z)=1 \\ 28(z+x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 420(x+y)=21 \\ 420(x+y)=20 \\ 420(z+x)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 420x+420y=21 \\ \cancel{420(x+y)=20} \quad 420x+420y=20 \\ 420z+420x=15 \end{cases}$$

Сложим 1 и 2 уравнение и вычтем ~~2~~ 3

$$420x+\cancel{420y}+420z+420x+420x+420y=21+15+20$$

$$840y=26 \quad y=\frac{26}{840}$$

Сложим 2 и 3 уравнение и вычтем 1: $420y+420z+420z+420x-$

$-420x-420y=20+15-21 \quad 840z=14 \quad z=\frac{14}{840}$

Сложим 1 и 3 уравнение и вычтем 2

$$420x+420y+420z+420x-420y-420z=21+15-20$$

$$840x=16 \quad x=\frac{16}{840}$$

Все вместе они красят $x+y+z$ часть забора: $\frac{16+14+26}{840}=\frac{56}{840}=\frac{7}{105}$, а за $\frac{105}{7}$ часов они красят весь забор, $=15$ часов $=15\cdot 60$ минут $=$ $=900$ минут

Ответ: За 900 минут.

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 7. Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.

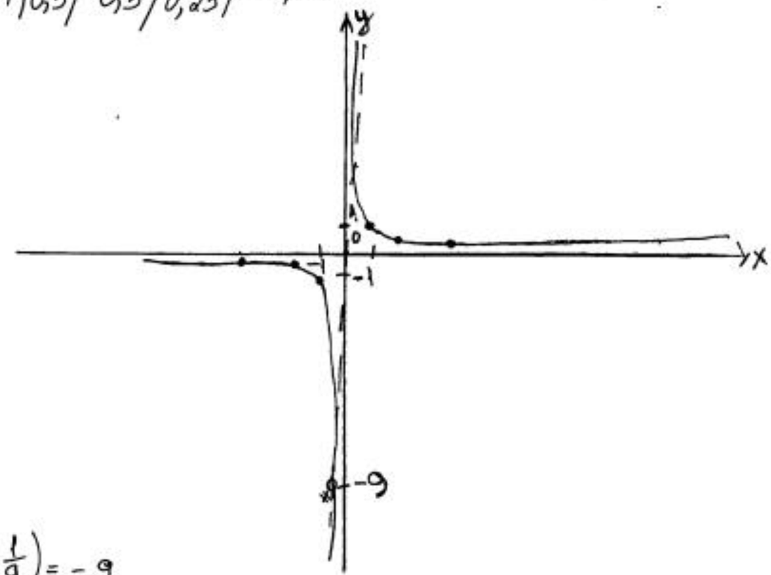
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x} = \dfrac{\cancel{9x+1}}{x(\cancel{9x+1})} = \dfrac{1}{x}$

ОДЗ: $9x^2+x \neq 0$
$x(9x+1) \neq 0$
$x \neq 0$; $9x+1 \neq 0$
$9x \neq -1$
$x \neq -\frac{1}{9}$

$y = \frac{1}{x}$ – графиком функции является гипербола

x	1	-1	2	-2	4	-4
y	1	-1	0,5	-0,5	0,25	-0,25



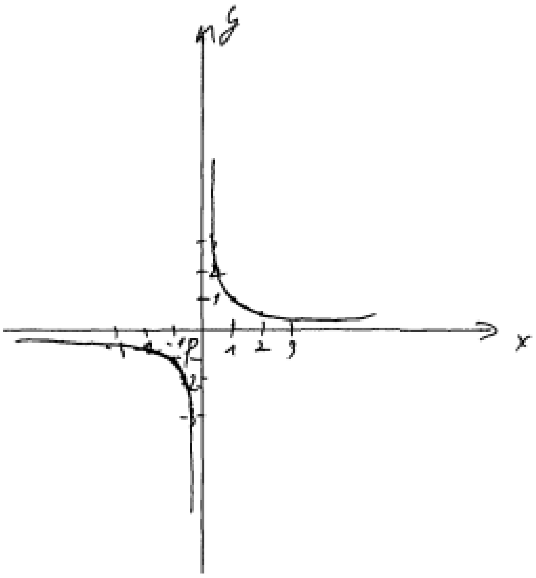
$y = kx$
$k \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = -9$
$k = -9 : \left(-\frac{1}{9}\right) = -9 \cdot \left(-\frac{9}{1}\right)$
$k = -81$
$k = 0$

Ответ: при $k = -81$ и $k = 0$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 8. Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Ответ: 81.



$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

x	1	2	0,5	-2	-1	-0,5
y	1	0,5	2	-0,5	-1	-2

$y = kx$

$kx = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$9x + 1 = 9kx^3 + kx^2$

$9kx^3 + kx^2 - 9x - 1 = 0$

$D = k^2 - 4 \cdot 9k \cdot (-9) = k^2 + 324k$

$k(k + 324) = 0$

$k = 0$ или $k = -324$

Ответ: $k = 0; -324$

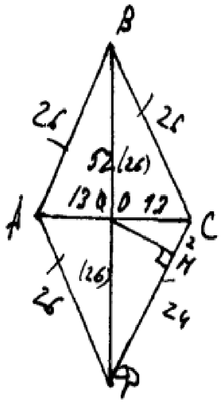
Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 9. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*



Найти:
ОН-?

Решение:

1) Т.к. АВСD- ромб ⇒ АВ = CD = BC = DA = 26см

2.) По свойству катет АО, лежащий против ∠ 30° (∠АОВ) равен $\frac{1}{2}$ АВ (гипотенуза) ⇒ АО = 13см. Т.к АО = ОС - диаг. ромба ⇒ АО = ОС = 13 см

3). По свойству диагонали АС меньше ВD в 2 раза ⇒ ВD = = 26·2 = 52 см

4) Расм. △ ОНD - прямоугольный; По Т Пифагора:

$26^2 = 24^2 + OH^2$

$676 = 576 + OH^2$

$OH^2 = 676 - 576$

$OH^2 = 100$

$OH = 10$

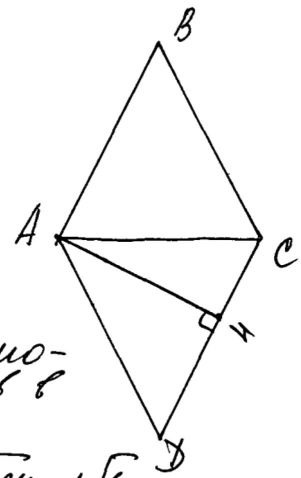
Ответ: ОН = 10см

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 10. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону пополам, на отрезки равные 1. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: $\sqrt{3}$.

Дано:
$ABCD$ – ромб
$AH \perp CD$
AH – высота
$CH = 1$
$DH = 1$
Н/ AH



1. по th о пропорциональных отрезках в $\triangle ACD$

$AH = \sqrt{CH \cdot HD} = \sqrt{1 \cdot 24} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AH = 4\sqrt{6}$

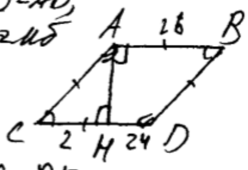
Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 11. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба. Ответ: 10.

Дано:
$ABCD$ – ромб
AH – высота
$DH = 24$
$CH = 2$
Найти: $AH = ?$

Решение:
$CD = CA = BD = AB$,
т.к. $ABCD$ – ромб
$\Downarrow$
$CH + HD = 26$



$CD = AB = AC = BD = 26$, ~~так~~

~~CA2~~ (по теор. Пифагора)

$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$

$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$

Ответ. $4\sqrt{42}$.

Оценка эксперта: ____

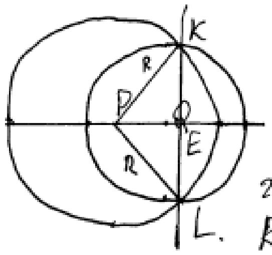
Комментарий: ____

№ 12. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

Содержание критерия	**Баллы**
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Дано:
окружность с центром в P и радиусом R; окружность с центром в Q и радиусом r.

Д-ть: $PQ \perp KL$



Решение

1) E — точка пересечения прямых PQ и KL

2) Проведём радиусы R от центра окружности P к точкам K и L. Мы получили $\triangle PKL$.

3) Рассмотрим $\triangle PKL$:

$PK = PL$ $(R = PK = PL) \Rightarrow \triangle PKL$ - равнобедр.

$\Downarrow$

$\angle KLP = \angle LKP$.

4) По т. cos в $\triangle PEL$ и $\triangle PKE$:

$PE^2 = R^2 + EL^2 - 2R \cdot EL \cdot \cos\angle KLP$

$PE^2 = R^2 + KE^2 - 2R \cdot KE \cdot \cos\angle LKP$

$\Downarrow$

$R^2 + EL^2 - 2R \cdot EL \cdot \cos\angle KLP = R^2 + KE^2 - 2R \cdot KE \cdot \cos\angle LKP$

$\angle KLP = \angle LKP$

$\Downarrow$

$EL = KE$.

$\Downarrow$

PE — медиана р/б $\triangle PKL$

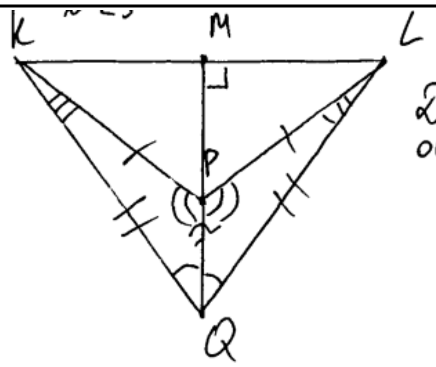
$\Downarrow$

PE — высота $\triangle PKL$ по св-ву медианы в р/б $\triangle$

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 13. Две окружности с центрами P и Q пересекаются в точках K и L, центры P и Q лежат по одну сторону относительно прямой KL. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой KL.



Дано:
окружности с центрами P и Q, и радиусами PK и QK соответств.
Доказать:
$PQ \perp KL$

Доказательство
$QK = QL$ (R одной окр)
$PL = PK$ (R одной окр)
$\Delta KPQ = \Delta PLQ$ (3 признак)
MQ – биссектриса угла KQL, она же является и медианой и высотой т.к ($KQ = QL$)
$PQ \perp KL$ (т.к отрезок QP лежит на прямой MQ, которая $\perp KL$, соответственно KL также $\perp PQ$)

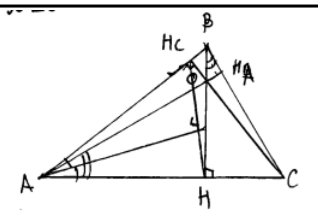
Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 14. Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. Длина *BC* равна 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*



1) Т.к. AL биссектриса и BL : LH = 5 : 4 => AB : AH = 5 : 4 => AB = 5k и AH = 4k, т.к. △ABC - прямоугольный то BH = 3k.

2) CH_C и AH_A высоты, тогда четырехугольник ABH_AH - описанный => ∠OAH = ∠HBC => △AOH ∼ BHC => $\frac{AO}{BC} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3}$ => $AO = \frac{4}{3} \cdot BC = 8$

3) Т.к. четырехугольник AH_COH - описанный и ∠ AH_CO и AHO - прямые, то OH диаметр описанной окружности этого четырехугольника => радиус описанной окружности △ H_CAH = 5.

4) Т.к. четырехугольник H_CHBC - вписанный, то ∠ABC = ∠AHH_C => △ AH_CH ∼ ABC => $\frac{r_{ABC}}{r_{H_CHA}} = \frac{AB}{AH} = \frac{5}{4}$ => $r_{ABC} = \frac{5}{4} \cdot r_{H_CHA} = 5$

Ответ: 5.

Оценка эксперта: ____

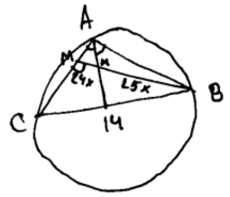
Комментарий: ____

№ 15. Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. Длина *BC* равна 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

Дано:
AH – биссектриса
$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$
$BC = 14$

Найти:
R



Решение:

AH – биссектриса (по условию)

$\Downarrow$

$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда
$AB = 25y$

$\Downarrow$

$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)

$\Downarrow$

$\Leftarrow \sin\angle A = \frac{7}{25}$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$

$\Downarrow$

$R = 25$

Ответ: 25.

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

Вариант 2

№ 1. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена арифметическая ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0 \qquad t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \quad |\cdot(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+\overset{40}{\overbrace{4\cdot1\cdot10}}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$

  $x=1{,}5$
- $x-1=-0{,}2$

  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 2. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0$. Ответ: $0,5$; $-\frac{1}{6}$.

№21

$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0;$

$\frac{1}{x^2}+\frac{4^{\backslash x}}{x}-12^{\backslash x^2}=0;$

$\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{12x^2}{x^2}=0,$

$\frac{-12x^2+4x+1}{x^2}=0;$

Дробь равна 0, когда её числитель равен 0.

$-12x^2+4x+1=0$; $a=-12$, $b=4$, $c=1$

$D=b^2-4ac=4^2-4(-12)\cdot1=16+48=64$

$x_1=\frac{-4+8}{2(-12)}=-\frac{\cancel{4}}{\cancel{24}}=-\frac{1}{6}$

$x_2=\frac{-4-8}{2(-12)}=\frac{-12}{-24}=\frac{\cancel{12}}{\cancel{24}}=\frac{1}{2}=0,5$

Ответ: $-\frac{1}{6}$; $0,5$

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 3. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$. Ответ: $1,5$; $0,8$.

1. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0.$

$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0.$

$\frac{1+3x-3-10x^2+20x-10}{(x-1)^2}=0$

$x-1\neq0$

$x\neq1$

$-10x^2+23x-12=0 \quad |\cdot(-1)$

$10x^2-23x+12=0$

$D=529-480=49=7^2$

$x_1=\frac{23-7}{20}=\frac{16}{20}=0,8$

$x_2=\frac{23+7}{20}=\frac{30}{20}=1,5$

Ответ: 0,8; 1,5.

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 4. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Начало решения задания №4

I. Пусть V работы Паши = x.

Тогда V работы Игоря = y; V работы Володи = z.

Примем весь покрашенный забор (всю работу) за 1.

Тогда, по условию $\frac{1}{x+y}=20$ часов; $\frac{1}{x+z}=21$ час; $\frac{1}{y+z}=28$ часов

II.
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=20 \\ \frac{1}{x+z}=21 \\ \frac{1}{y+z}=28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{20}-x \\ \frac{1}{x+z}=21 \\ \frac{1}{\frac{1}{20}-x+z}=28 \end{cases}$$

$$\frac{1\cdot 20}{1-20x+20z}=28$$

$$20z-20x=\frac{20}{28}-1=\frac{10}{14}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}$$

$$20z=-\frac{2}{7}+20x$$
$$z=(-\frac{2}{7}+20x)/20$$

Продолжение на следующей странице

Продолжение решения задания №4

$$\frac{\frac{-2}{7}+20x}{20}=\frac{-2+140x}{140}=\frac{2(70x-1)}{2\cdot 70}=\frac{70x-1}{70}=z$$

$$\frac{1}{x+\frac{70x-1}{70}}=21$$

$$\frac{70}{70x+70x-1}=21$$

$$\frac{70}{140x-1}=21$$

$$140x-1=\frac{70}{21}=\frac{7\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{70}{3}$$

$$140x=\frac{70}{3}+1=\frac{73}{3}$$

$$x=\frac{73}{3\cdot 140}=\frac{73}{420}$$

$$z=\frac{\left(\frac{70\cdot 73}{420 \, 6}-1\right)}{70}=\frac{\frac{73}{6}-1}{70}=\frac{7}{6\cdot 70}=\frac{7}{420}$$

$$y=\frac{1}{20}-\frac{73}{420}=\frac{21}{420}-\frac{73}{420}=\frac{8}{420}$$

$$\frac{1}{\frac{7}{420}+\frac{8}{420}+\frac{73}{420}}=\frac{420}{7+8+73}=\frac{420}{28}=15 \text{ часов}$$

15 часов $=15\cdot 60=900$ минут.

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 5. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 900 минут.

Примем всю работу за единицу. Тогда производительность Игоря (И) и Паши (П) → $\frac{1}{20}$; Паши и Володи (В) → $\frac{1}{21}$; Володи и Игоря → $\frac{1}{28}$; С такими показателями производительности вместе они покрасят забор дважды:

$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\right)t=2$ $\quad (И+П+В)t=1$

т.к. $(И+П+П+В+В+И)t=2$ т.е $(2И+2П+2В)t=2$

где t – время в часах (за которое ребята выполнят работу дважды)

Т.о., $\frac{t}{20}+\frac{t}{21}+\frac{t}{28}=2 \Rightarrow \frac{3\cdot5\cdot t+4\cdot5t+3\cdot7t}{3\cdot4\cdot5\cdot7}=2$

$\frac{(15+20+21)t}{420}=2$ $\quad \frac{56t}{420}=2$ $\quad 28t=420$

$t=15ч \rightarrow 2$ раза

$t_1=\frac{15ч}{2}=7{,}5ч=7{,}5\cdot60мин=450$ мин $\rightarrow$ ответ: 450 мин

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 6. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах. Ответ: 700 минут.

Дано:
П, И } 14ч
П, В } 15ч
В, И } 30ч
Найти: П, И, В } ?

Решение:
П > И > В
И = 30 - 14 = 16 ч - дел. р. И
(14·2) - 16 = 12 ч – делает работу П
30 - 16 = 14ч – дел. р. В.
$\frac{14+16+12}{6}$ = 7ч = 420 мин - потребуется, чтобы мальчики покрасили забор, работая втроем.

Ответ. 420 мин.

Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 7. Постройте график функции $y = \dfrac{7x - 10}{7x^2 - 10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 0,49.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

$y = \dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$

$y = \dfrac{7x-10}{x(7x-10)}$

ОДЗ: $x \neq 0$

$x \neq \dfrac{10}{7}$

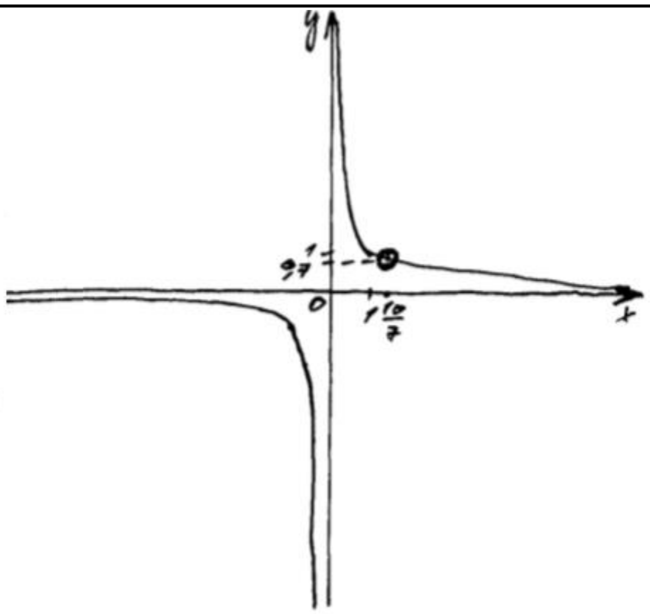
$y = \dfrac{1}{x}$ – График

при $x = \dfrac{10}{7}$: $y = \dfrac{1 \cdot 7}{10} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$

$\dfrac{7}{10} = k \cdot \dfrac{10}{7}$

$k = \dfrac{7 \cdot 7}{10 \cdot 10} = \dfrac{49}{100} = 0{,}49$ При $k = 0{,}49$

Ответ: 0,49.



Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 8. Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

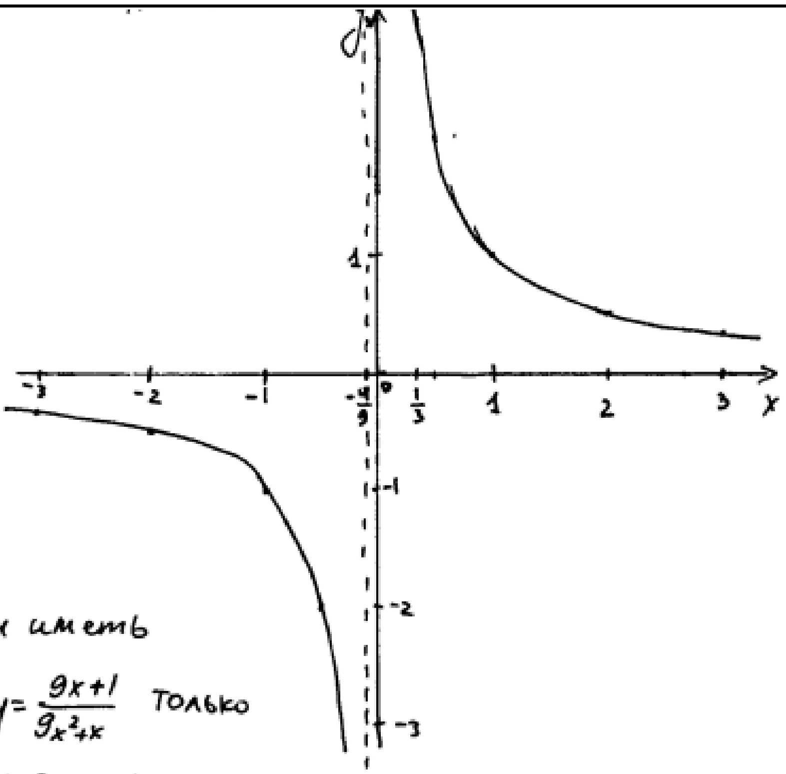
$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \dfrac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечение график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$. Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \,|\cdot(-9)$

$k = 81$.

Ответ: 81

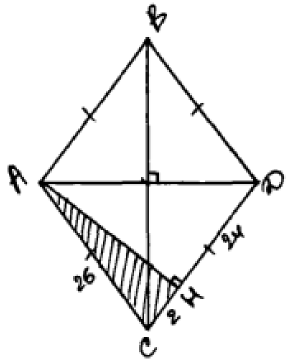
Оценка эксперта: ______________________________

Комментарий: ______________________________

№ 9. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*



Дано: ABCD – ромб; AH – высота; DH = 24; CH = 2
Найти: AH

Решение: 1) Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны => AC = CD = 24 + 2 = 26

2) Рассмотрим $\triangle ACH$: он прямоугольный, т.к. AH – высота ABCD; AC – гипотинуза, CH – катет, AH – катет => по теореме Пифагора найдем катет AH.

$26^2 = AH^2 + 2^2$

$676 = AH^2 + 4$

$672 = AH^2$

$4\sqrt{42} = AH$ (высота)

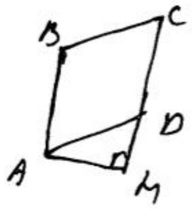
Ответ: $4\sqrt{42}$ – высота ромба.

Оценка эксперта: ______________________________

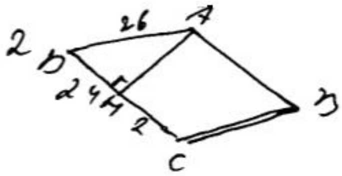
Комментарий: ______________________________

№ 10. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



$BH < CH$
что противоречит условию



$DC = 26 \Rightarrow$
$DA = 26$

$\triangle DAH$: $DA = \sqrt{26^2 + 24^2} = 10$

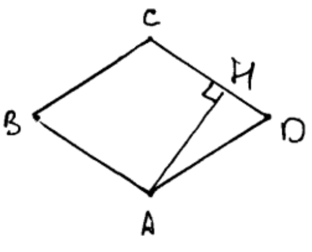
Ответ: $AH = 10$

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 11. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Дано:
ABCD - ромб
AH - высота
$CH = 2$
$DH = 24$
AH - ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны $CD = AD = CH + DH$
$AD = 26$

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по Th Пифагора на $\triangle AHD$)
$AH = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 12. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, центры *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *EF*.

Содержание критерия	**Баллы**
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Дано: окр. $(P; r_1)$; окр. $(Q; r_2)$; окр. $(P; r_1) \cap$ окр. $(Q; r_2) = K; L$ так, что $PT = TQ$

Док-ть: $PQ \perp KL$.

Док-во:

1) Начертим ΔPKQ.

2) т.к. $PT = TQ$ – по усл. $\Rightarrow KT$ – медиана ΔPKQ к стороне PQ

3) т.к. (·)-а $K, L \in$ окр. $(P; r_1)$ и окр. $(Q; r_2) \Rightarrow PK = r_1$, $KQ = r_2$; $PL = PK = r_1$; $KQ = QL = r_2$

4) Из п. 2 и 3 $\Rightarrow \Delta PKL$ – р/б по опр. $(PK = PL)$

Аналогично ΔKQL – р/б.

5) т.к. $KT = TL$, $PK = PL \Rightarrow PT$ – медиана, а по св-ву р/б Δ-а $\Rightarrow PT \perp$ к KL.

Аналогично QT – медиана $\Rightarrow QT \perp KL$

$\Downarrow$

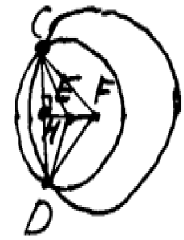
т.к. $PT = TQ$ (по усл.) $\Rightarrow PQ \perp KL$.

ч.т.д.

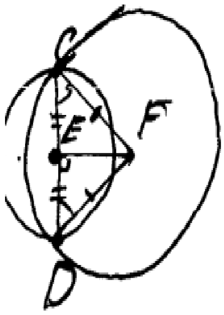
Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 13. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, центры *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямая *CD* перпендикулярна прямой *EF*.



Д/п – радиусы $EC=ED$; $FC=FD$.
Рассм. $\triangle CED$: $\triangle CED$ – р/б (по опред.)
=> EH опущена к основанию
В $\triangle CFD$: $\triangle CEF=\triangle DEF$ (по 3ём сторонам) =>
=> $\angle CFE = \angle DFE$ => EF – бисс.
Т.к EF – бисс, то HF тоже бисс, т.к $EF \in HF$
=> в р/б $\triangle CED$: EH – бисс. (т.к. $EH \in HF$)
=> EH и высота и медиана (т.к опущена к основанию). Т.к $EH \in HF$, то $HF \perp CD$ и $EF \perp CD$, ч.т.д.



Вариант II.
Д/п – радиусы $CF=DF$. Тогда $\triangle CFD$ – р/б
=> $\angle ECF=\angle FDE$ (по св-ву р/б $\triangle$)
Т.к. CD – диаметр, то $EC=ED$ – радиусы
=> EF – медиана в р/б $\triangle CFD$ =>
EF и высота и биссектрисса (по теореме о высоте к основанию в р/б $\triangle$), ч.т.д.

Оценка эксперта: ____________________

Комментарий: ____________________

№ 14. Биссектриса *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 25:24, считая от вершины. Длина *BC* равна 14. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 25.

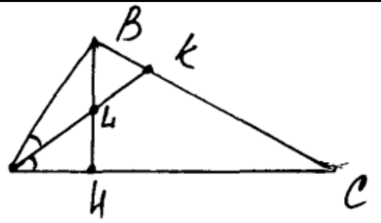
Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена арифметическая ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

$\omega(O;R)$

$BL:LH=25:24$

$BC=14$

Н/ R



1. по св-ву биссектрисы в $\triangle ABH$

$\frac{AB}{AH}=\frac{BL}{LH}=\frac{25}{24}.$

2. по th Пифагора в $\triangle ABH$

$BH=\sqrt{25^2a^2-24^2a^2}=a\sqrt{1\cdot 49}=7a$

Ответ: $R=25$

3. sin в $\triangle ABH$:

$\sin A=\frac{BH}{AB}=\frac{7}{25}$

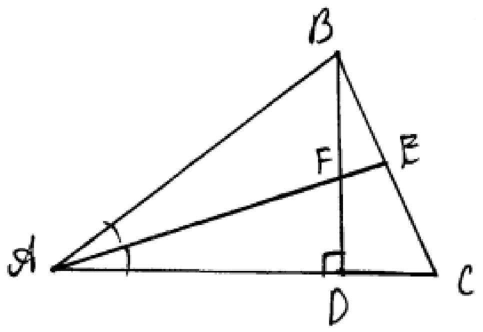
4. $R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{14\cdot 25}{14}=25$

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____

№ 15. Биссектриса угла *A*, треугольника *ABC* делит высоту *BH* в отношении 5:4, считая от вершины. Длина *BC* равна 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.



дано:

ΔABC, $\angle BDC = 90°$, $\angle BAE = \angle EAC$,

$AE \cap BD = F$, $BF:FD = 5:4$, $BC = 6$,

найти:

R оп. окружности,

решение:

1) по св. биссектрисы в ΔABD, $AB:AD = BF:FD = 5:4$, =>
по теореме Пифагора, $AB:BD = 5:3$, =>
$\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$,

2) по следствию из теоремы синусов,
$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R_{оп.}$, $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10$, => $R_{оп.} = 5$,

Ответ: 5.

Оценка эксперта: ____

Комментарий: ____