



ФИПИ

Федеральная служба по надзору в сфере образования
и науки

ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

**И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Самсонов,
А.В. Семенов**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные
на основе анализа типичных ошибок
участников ЕГЭ 2024 года**

по МАТЕМАТИКЕ

Москва, 2024

ЕГЭ по математике с 2015 г. проходит на базовом и профильном уровнях. Выбор уровня осуществляет участник экзамена в соответствии с дальнейшей траекторией продолжения образования. ЕГЭ по математике профильного уровня предназначен для планирующих продолжение образования в вузах по специальностям, для обучения на которых требуется повышенный уровень математической подготовки и при поступлении на которые учитывается результат по математике. В КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня проверяется соответствие подготовки экзаменуемых требованиям ФГОС углубленного уровня по математике с акцентом на овладение умениями применять полученные знания при решении задач из смежных областей, проводить доказательные рассуждения, применять знания на практике, а также на развитость логического мышления и сформированность умения работать с различной информацией. ЕГЭ по математике базового уровня предназначен для тех, кто не планирует поступать в вуз или планирует продолжение образования по специальностям, для обучения на которых не требуется повышенная математическая подготовка и экзамен по математике не учитывается при поступлении. В КИМ ЕГЭ по математике базового уровня проверяется требованиям ФГОС базового уровня по математике с акцентом на овладение умениями применять полученные знания на практике и применять математический аппарат в массовых гуманитарных профессиях, а также развитость логического мышления и сформированность умений работать с различной информацией.

Информация о результатах ЕГЭ по математике в 2024 г. представлена по каждому из уровней.

ЕГЭ 2024 г. по математике профильного уровня

Вариант КИМ по математике профильного уровня состоял из двух частей и включал в себя 19 заданий, которые различались по содержанию, сложности и количеству заданий:

- часть 1 содержала 12 заданий (задания 1–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;
- часть 2 содержала 7 заданий (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку готовности экзаменуемых к продолжению образования в вузах по массовым техническим, экономическим и IT-специальностям. Задания части 2 предназначены для проверки готовности экзаменуемых к продолжению образования в ведущих вузах по техническим, естественно-научным, математическим, экономическим, IT-специальностям и другим специальностям, где нужен высокий уровень владения математическими знаниями.

Задания относятся к трем учебным курсам: «Алгебра и начала математического анализа» – 12 заданий; «Геометрия» – 5 заданий; «Вероятность и статистика» – 2 задания.

Задания варианта КИМ ЕГЭ распределены по уровням сложности:

- часть 1 содержала 7 заданий базового уровня (задания 1–4, 6–8) и 5 заданий повышенного уровня (задания 5, 9–12);
- часть 2 содержала 5 заданий повышенного уровня (задания 13–17) и 2 задания высокого уровня сложности (задания 18, 19).

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивалось 1 баллом. Проверка выполнения заданий 13–19 проводилась экспертами на основе разработанной системы критериев оценивания. Полное правильное решение каждого из заданий 13, 15 и 16 оценивалось 2 баллами; каждого из заданий 14 и 17 – 3 баллами; каждого из заданий 18 и 19 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы – 32.

На выполнение экзаменационной работы отводилось 3 часа 55 минут (235 минут).

Минимальный пороговый первичный балл ЕГЭ по математике профильного уровня – 5; минимальный пороговый тестовый балл – 27.

В содержание КИМ 2024 г. по сравнению с моделью 2020–2023 гг. внесено изменение – добавлено задание с кратким ответом по теме «Векторы и координаты, скалярное произведение».

Такое изменение позволило:

– усилить акцент на межпредметные связи, в частности на связь математики с физикой и информатикой;

– расширить возможности решения геометрических задач за счет осмысленного применения векторного метода;

– способствовать преемственности обучения в высших учебных заведениях, поскольку образовательная программа по высшей математике для многих направлений подготовки содержит разделы, в основе успешного изучения которых лежит умение студентов младших курсов работать с векторами (векторная алгебра, аналитическая геометрия и т.д.).

Максимальный первичный балл по сравнению с 2023 г. вырос на 1 балл.

В остальном структура части 1 КИМ сохранилась: первый блок «Геометрия», второй блок «Вероятность и статистика», третий, наиболее объемный, блок «Алгебра и функции». Такая структура позволяет участнику экзамена эффективно распределить отведенное на работу время на решения заданий в тематических блоках.

На рис. 1 представлены распределения первичных баллов ЕГЭ в 2022–2024 гг.

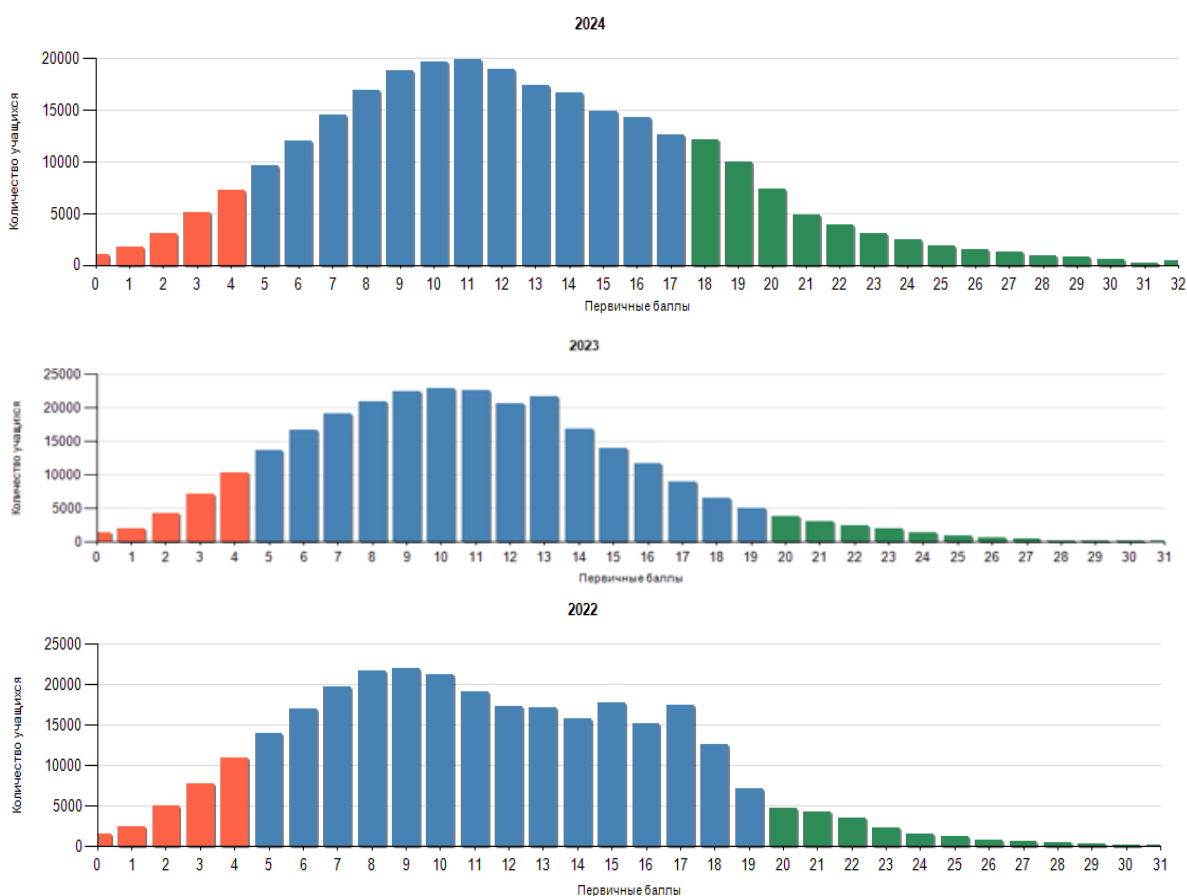


Рис. 1. Распределение первичных баллов ЕГЭ профильного уровня в 2022–2024 гг.

Характер распределения первичных баллов ЕГЭ в 2024 г. существенным образом не изменился. Распределение стало ближе к нормальному. Хорошо заметен рост долей будущих абитуриентов массовых технических вузов (тех, кому требуется не менее 60 баллов) и абитуриентов ведущих вузов (тех, кто получает высокие баллы). При этом сохраняется высокая дифференцирующая способность экзамена на участке высоких баллов, что очень важно для проведения отбора абитуриентов в ведущие вузы без использования дополнительных вступительных испытаний по математике.

В 2024 г. около 5 % участников не преодолели минимальный балл (5 п.б. / 27 т.б.). По сравнению с двумя предыдущими годами доля участников экзамена с результатами от 0 до 40 тестовых баллов, то есть не набравших «вузовский порог» (39 тестовых баллов), значительно снизилась. Также произошло заметное повышение как доли, так и числа участников экзамена, набравших не менее 60 баллов (для этого в 2024 г., как и в 2023 г., требовалось набрать 11 первичных баллов, решив, например, 11 заданий части 1 КИМ). Это достигнуто в первую очередь за счет более успешного выполнения заданий по функциональной грамотности, по вероятности и статистике, заданий на работу с векторами – по разделам, которые особенно важны для дальнейшего образования в IT-сфере. Рост числа абитуриентов технических вузов – результат успешной работы учителей, в том числе, по реализации углубленных курсов математики, подкрепленный на завершающем этапе реализацией межведомственного проекта Рособнадзора, Минпросвещения и Минобрнауки России по обеспечению учителей и школьников качественными бесплатными электронными материалами по подготовке к ЕГЭ по математике.

Более 18 % участников ЕГЭ 2024 г. показали результаты в диапазоне 81–100 баллов.

В 2024 г. закрепились заметная положительная динамика результатов, наблюдаемая последние 10 лет (с коррекцией во время дистанционного обучения, связанного с пандемией ковида). Значительно выросла доля участников, верно решающих задачу по теории вероятностей базового уровня (с 20–25 % в 2015 г. до 92 % в 2024 г.), а доля решающих более сложную задачу на знание вероятностных формул и фактов составляет около 70 % (не больше 50 % в 2022 г.).

Выросла доля участников, уверенно владеющих понятийным аппаратом школьного курса математического анализа. Задачи, проверяющие понимание свойств производной, в 2015 г. решили около 40 % участников, в 2024 г. задачи аналогичного уровня сложности и содержания – около 70 % участников; решаемость заданий на исследование функции выросла с 40 % до 80 %.

Новую для ЕГЭ задачу на векторы успешно решили около 85 % участников профильного ЕГЭ.

Выросла доля участников, уверенно решающих базовые задачи по стереометрии (отношение или сравнение площадей и объемов) – с 30–35 % в 2015 г. до 70–85 % в 2024 г.

При этом пока сохраняется на низком уровне процент выполнения заданий по стереометрии в части 2 экзамена, а также заданий по началам математического анализа, связанных с нахождением наибольших значений с использованием производных, и заданий с параметром.

В результатах участников ЕГЭ наблюдается высокий уровень освоения метапредметных умений и навыков. Этому способствует содержание предлагаемых задач, необходимость работать с информацией, представленной различными способами: текстом, графиками, схемами, таблицами. Для части заданий участники экзамена самостоятельно преобразовывают условие задачи и показывают взаимосвязь между заданными величинами в удобных для них схемах, таблицах. Задания по теории вероятностей и с экономическими моделями допускают решение в виде дерева анализа возможных вариантов, чем школьники успешно пользуются. В заданиях на числовые зависимости участники экзамена и профильного, и базового уровней показывают навыки исследовательской деятельности

и общеучебные умения информационно–логического характера. Структура экзамена позволяет ученику видеть задания сразу в блоках соответствующих разделов школьного курса математики, что положительно отражается на оценке учеником трудности предлагаемых заданий и на установлении им последовательности решения задач экзаменационного варианта и алгоритма решения этих задач.

Проверяемые элементы содержания, изучаемые в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа», традиционно осваиваются лучше, чем элементы курса «Геометрия». На профильном уровне участники в целом продемонстрировали приемлемую технику преобразований и вычислений при решении уравнений. Тем не менее вычислительные ошибки по-прежнему остаются основной причиной неверного выполнения заданий: при правильных рассуждениях и разумном алгоритме решения они часто получают неверный ответ за счет ошибок в решении простейших уравнений и при выполнении арифметических действий.

Изучение геометрии намного хуже алгоритмизируется, чем изучение алгебры: количество геометрических конфигураций, возникающих даже в несложных задачах с двумя-тремя объектами, велико. У школьников создается ложное представление о том, что геометрия «необозрима» и потому намного сложнее алгебры. К сожалению, эта убежденность часто подпитывается учителями, которые полагают, что изучать алгебру легче и продуктивнее, поскольку алгебраических заданий на экзамене больше, чем геометрических. При этом в экзамене профильного уровня определенный рост акцента на важные для инженерных специальностей геометрические задания способствовал началу роста геометрической подготовки выпускников.

К сожалению, непреодоленной остается главная и серьезная проблема: «перекос» в математической подготовке школьников в сторону решения большого количества тренировочных работ по специализированным сборникам или вариантам прошлых лет. Давая своим ученикам клонированные варианты один за другим, учитель добивается, как ему кажется, безусловного и безукоризненного выполнения работ почти всеми учащимися класса. У него создается ложное мнение, что школьники готовы к сдаче ЕГЭ, и похожее впечатление возникает у самих школьников и их родителей.

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь изучая математику во всем разнообразии ее методов; необходимо уделять должное внимание развитию логики и математической речи, в том числе устной, умению выражать мысли на бумаге доходчиво, просто и доказательно. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ, сборники задач и вариантов, если их использовать как источник идей и для проверки собственных достижений, но не как коллекцию репетиционных материалов.

Ниже рассмотрены результаты выполнения типичных заданий профильного ЕГЭ по математике в 2024 г. с указанием вероятных причин низкой результативности ряда заданий.

В таблице 1 приведены результаты выполнения заданий профильного ЕГЭ по темам.

Таблица 1

Код темы	Название темы	№ в КИМ	Уровень	Ср. % вып.
7.1	Фигуры на плоскости	1	Б	82
7.5	Координаты и векторы	2	Б	85
7.3; 7.4	Многогранники. Тела и поверхности вращения	3	Б	70
6.2	Вероятность	4	Б	93
6.2	Вероятность	5	П	73
2.2; 2.4	Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения	6	Б	97

Код темы	Название темы	№ в КИМ	Уровень	Ср. % вып.
1.5; 1.6; 1.8	Синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента. Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Преобразование выражений	7	Б	59
4.1; 4.2	Производная функции. Производные элементарных функций. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке	8	Б	61
2.1; 2.2	Целые и дробно-рациональные уравнения. Иррациональные уравнения	9	П	69
2.1	Целые и дробно-рациональные уравнения	10	П	76
3.3; 3.5	Степенная функция с натуральным и целым показателем. Её свойства и график. Свойства и график корня n -ой степени. Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики	11	П	85
4.1; 4.2	Производная функции. Производные элементарных функций. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке	12	П	70
2.3	Тригонометрические уравнения	13	П	47
7.1; 7.2; 7.3	Фигуры на плоскости. Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники	14	П	4
2.5; 2.7	Целые и дробно-рациональные неравенства. Показательные и логарифмические неравенства	15	П	27
1.1; 1.2	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби	16	П	28
7.1	Фигуры на плоскости	17	П	9
2.9; 2.5; 2.10	Системы и совокупности уравнений и неравенств. Целые и дробно-рациональные неравенства. Уравнения, неравенства и системы с параметрами	18	В	5
1.1; 1.2	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби	19	В	15

Для анализа выполнения заданий КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2024 г. Каждое из использованных для анализа заданий выполняли не менее 8000 участников экзамена из разных регионов.

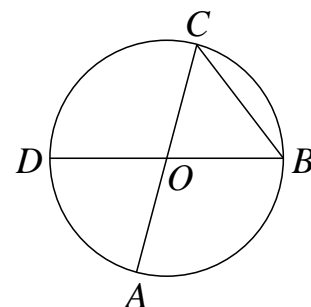
Раздел «Геометрия»

Задания 1, 2 и 3 с кратким ответом базового уровня.

Задание 1 – геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

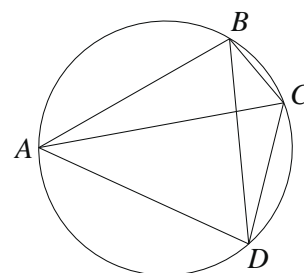
Пример 1

Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 59° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Пример 2

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 103° , угол CAD равен 42° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Комментарий. Задание верно выполнили больше 80 % участников экзамена. Большую помощь в решении задачи оказал участникам экзамена приведенный в условии чертеж заданной геометрической конфигурации. Основные ошибки заключались в неверном установлении для вписанного угла соответствующего ему центрального и применении свойств вписанного в окружность четырехугольника.

Следует отметить, что практика решения планиметрических задач на готовых чертежах является широко распространенной и при проведении занятий итогового повторения ею не следует пренебрегать.

Задание 2 – геометрическая задача на нахождение длины вектора или скалярного произведения векторов.

Пример 1

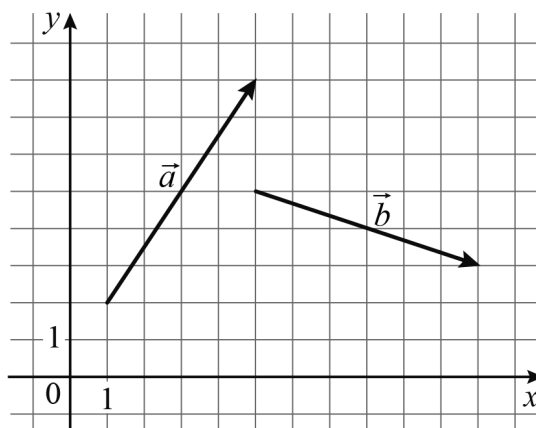
Даны векторы $\vec{a}(2; 0)$ и $\vec{b}(1; 4)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

Пример 2

Даны векторы $\vec{a}(5; 3)$ и $\vec{b}(4; -6)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

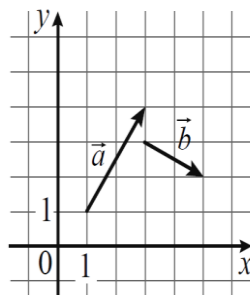
Пример 3

На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Пример 4

На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

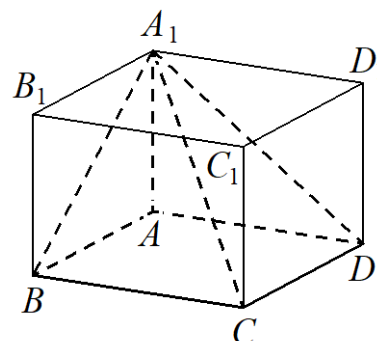


Комментарий. Задание верно выполнили больше 80 % участников экзамена. В ЕГЭ 2024 г. такое задание было включено впервые, и оно базируется на применении основных свойств векторов и координат. Основные ошибки были связаны с неверным применением формулы скалярного произведения векторов.

Задание 3 – геометрическая задача на нахождение геометрических величин.

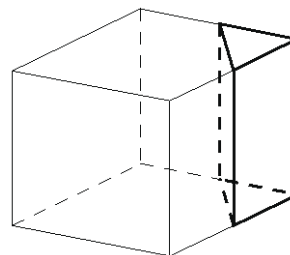
Пример 1

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 3, AD = 9, AA_1 = 4$.



Пример 2

Объём куба равен 80. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



Комментарий. Задание верно выполнили больше 70 % участников экзамена. Для успешного решения таких задач необходимы элементарное пространственное воображение и правильность вычисления соответствующих величин, когда заданное тело разбито на несколько частей.

Раздел «Вероятность и статистика».

Задание 4 с кратким ответом базового уровня и задание 5 с кратким ответом повышенного уровня.

Задание 4 – задача по теории вероятностей на прямое вычисление вероятности.

Пример 1

Фабрика выпускает сумки. В среднем 4 сумки из 50 имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без скрытого дефекта.

Пример 2

В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Задание 5 – задача по теории вероятностей повышенного уровня.

Пример 1

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Пример 2

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Комментарий. Задание 4 верно выполнили больше 90 %, задание 5 верно выполнили больше 70 % участников экзамена, что говорит о успешном овладении выпускниками умениями анализа простейших вероятностных моделей, готовности школы к реализации обновленного ФГОС, предусматривающего систематическое изучение вероятности и статистики в рамках специально выделенного часа в учебном плане с 7 по 11 класс.

Типичные ошибки при выполнении этих заданий связаны с неумением анализировать вероятностную модель и формальным заучиванием правил для вычислений по формулам.

Раздел «Алгебра и начала математического анализа»

Задание 6 проверяет умение решать уравнения.

Пример 1

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+6} = 4$.

Пример 2

Найдите корень уравнения $\sqrt{44-5x} = 3$.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 95 % участников экзамена. Необходимо обратить внимание на важность выполнения проверки найденного корня уравнения. Этот этап решения такого задания является страховкой от ошибки при решении задания.

Задание 7 – нахождение значения тригонометрического выражения.

Пример 1

Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,2$.

Пример 2

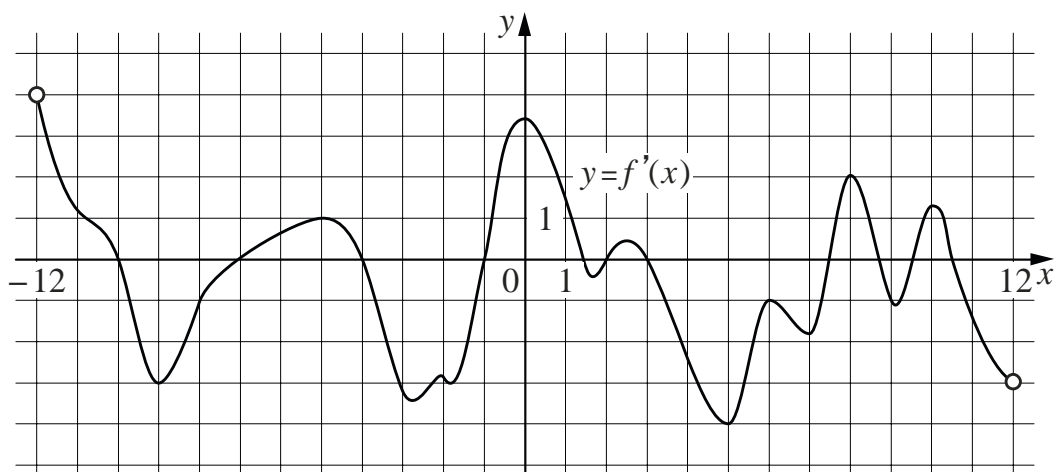
Найдите значение выражения $3\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{13\pi}{12}$.

Комментарий. Задание верно выполнили около 60 % участников экзамена. Основные ошибки в решении таких заданий связаны с прямым вычислением значения тригонометрического выражения без предварительного преобразования к более простому выражению. Сочетание излишних вычислений и громоздкость проводимых преобразований не позволили многим участникам экзамена получить правильное значение.

Задание 8 – поиск точек экстремума функции по изображению графика производной этой функции.

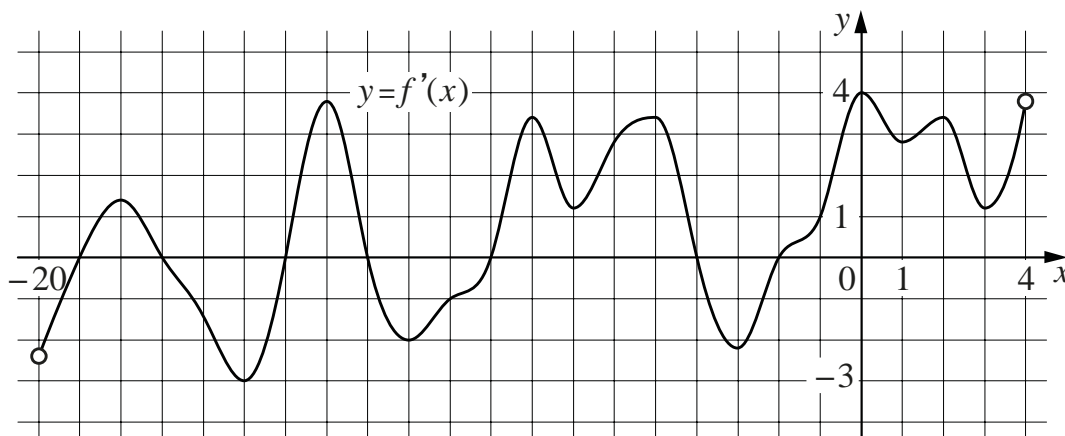
Пример 1

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 12)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 11]$.



Пример 2

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-20; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 1]$.



Комментарий. Задание верно выполнили больше 60% участников экзамена. Достигнутый уровень выполнения задания не полностью соответствует стоящим перед школой задачам по подготовке абитуриентов массовых технических вузов. Следует обратить внимание на более активное использование в ходе изучения курса «Алгебра и начала математического анализа» наглядных сюжетов, позволяющих достичь понимания обучающимися сути понятия производной функции, анализу графиков функций, не сводя курс к рутинному вычислению по формулам.

Задание 9 – вычисление по формуле.

Пример 1

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в Вт), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в м^2), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{2401} \cdot 10^{22} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $5,7 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды. Ответ дайте в кельвинах.

Пример 2

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 90 \text{ км/ч}$, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16 \text{ км/ч}^2$. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 72 км. Ответ дайте в минутах.

Комментарий. Задание верно выполнили около 70 % участников экзамена. Основные сложности связаны с выполнением алгебраических преобразований и вычислениями. Необходимо уделить особое внимание вопросам вычислительной культуры обучающихся, развитию у них приемов и подходов, направленных на упрощение вычислений. Задание показывает готовность выпускников к продолжению образования в массовых технических вузах.

Задание 10 – текстовая задача на работу.

Пример 1

Первый насос наполняет бак за 11 минут, второй — за 15 минут, а третий — за 1 час 50 минут. За сколько минут наполнят этот бак три насоса, работая одновременно?

Пример 2

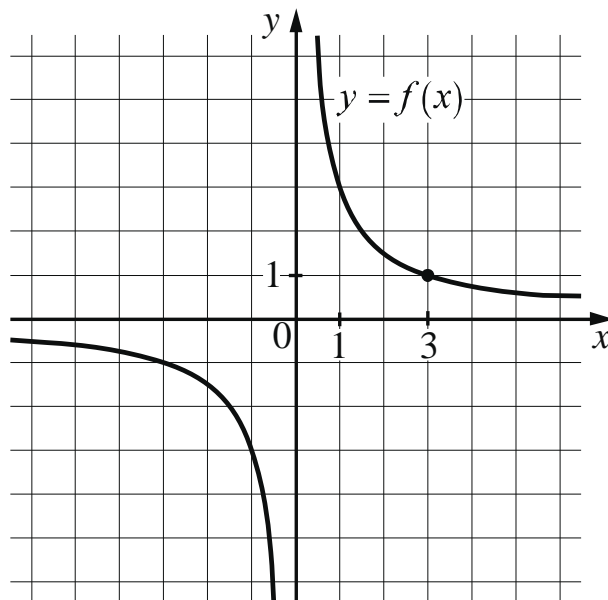
Юля и Уля, работая вместе, пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Уля — за 120 минут. За сколько минут пропалывает эту грядку одна Юля?

Комментарий. Задание верно выполнили больше 75 % участников экзамена. Типичные ошибки связаны с неумением составить математическую модель, доля вычислительных ошибок невысока.

Задание 11 – выполнение действий с функциями.

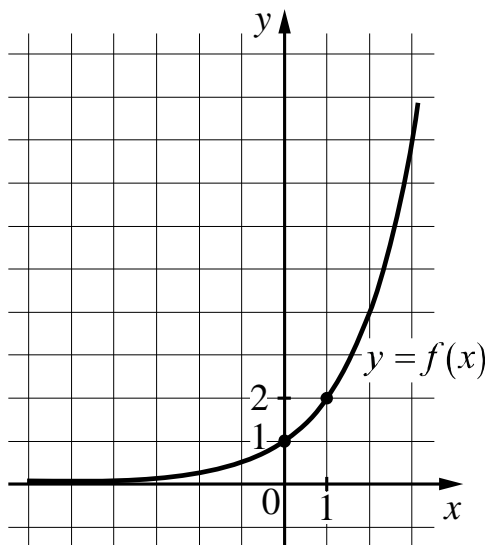
Пример 1

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(30)$.



Пример 2

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(5)$.



Комментарий. Задание верно выполнили больше 85 % участников экзамена. Задание такого типа было впервые включено в ЕГЭ по математике в 2022 г. Результат выполнения данного задания говорит о сформированности у обучающихся умений работать с графиками элементарных функций, характеризовать поведение функций, использовать полученные знания для описания и анализа реальных зависимостей. Следует уделять, как отмечено выше, больше внимания работе с функциями, их графиками.

Задание 12 – задача на нахождение точек экстремума функции с использованием производной.

Пример 1

Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot \ln(x - 4) - 9x - 7$.

Пример 2

Найдите точку максимума функции $y = 3,5x^2 - 29x + 30 \cdot \ln x + 67$.

Комментарий. Задание верно выполнили 70 % участников экзамена. Для нахождения точки максимума функции необходимо было верно найти производную функции, решить соответствующее уравнение и определить нужную точку. Основные ошибки связаны с тем, что участники экзамена не следовали стандартному алгоритму, а пытались сократить количество выполняемых действий для получения нужного значения, в результате чего допускалась ошибка и в ответ включалось неверное значение точки максимума.

Задание 13 – уравнение с отбором корней, принадлежащих промежутку. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример 1

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Пример 2

а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin(x + \pi) - 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Комментарий. Задание верно выполнили 47 % участников экзамена. Основные ошибки, допущенные в решении этого задания, связаны с неверным применением тригонометрических формул, в частности формул приведения (или формул сложения), а также с неверным решением простейших тригонометрических уравнений.

Следует отметить важность развития в курсе математики не только умения находить верный ответ, но и умения полно, обоснованно записывать решение задачи. К сожалению, в данной задаче заметное число участников экзамена пропускает шаги в решении и обосновании, иногда просто приводя ответ, который им кажется очевидным, из рисунка, что зачастую приводит к ошибке в ответе, или при верном ответе к неполучению балла из-за отсутствия обоснованного решения. При этом путь решения может быть любым, математически корректным и обоснованным, содержащим все ключевые элементы решения, например, пункт б) можно выполнить при помощи как окружности, так и прямой или неравенств.

Задание 14 – геометрическая задача (стереометрия). Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3.

Пример 1

В правильном тетраэдре точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

Пример 2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 3 : 1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Комментарий. Задание полностью верно выполнили чуть меньше 5 % участников экзамена. Основные сложности в выполнении этого задания и высокий процент не приступивших к выполнению этого задания связаны с фактическим игнорированием в значительном количестве школ формирования таких важных умений, как решать двух–четырёхходовые стереометрические задачи и проводить доказательства стереометрических утверждений. Большой разрыв в результатах правильного решения заданий по стереометрии частей 1 и 2 говорит о том, что на уроках преимущественно ограничиваются только решением простейших наглядных и вычислительных заданий, без развития столь необходимого для дальнейшего продолжения образования по современным инженерным специальностям умения проводить исследование стереометрической конструкции.

Следование ФГОС и федеральной образовательной программе приведет в двух-трёхлетней перспективе к существенному росту выполнения таких заданий. Наиболее трудными, как правило, являются логические построения, связанные с доказательством от противного. Отмечая важность развития умений выполнять такие задания для успешного продолжения образования не только по инженерным специальностям, но и по IT-специальностям, следует обратить внимание учителей на необходимость в курсе стереометрии формировать у учеников умение решать задачи различными методами, как геометрическими, так и аналитическими.

Задание 15 – решение неравенства. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример 1

Решите неравенство $\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

Пример 2

Решите неравенство $\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1$.

Комментарий. Задание полностью верно выполнили около 30 % участников экзамена. Верное выполнение заданий данного типа требует развитых умений работы с алгебраическими выражениями, проведения равносильных преобразований, грамотного применения метода замены переменной. Как и в других заданиях с развернутым ответом, участник экзамена может привести любой, полный, математически корректный и обоснованный путь решения.

К сожалению, некоторые учителя вместо развития навыков решения неравенств обучают учеников определенным шаблонным путям решения, ошибочно полагая, что только такие решения оцениваются как верные. Это приводит к тому, что заметное число участников экзамена пытается применять некорректные в конкретной задаче подходы к решению, влекущие ошибки в ответах, некорректность в решении, а в ряде случаев невозможность завершить решение задачи. Следует начинать повторение с простейших заданий на решение неравенств и, отработав базовые приемы, переходить к решению разнообразных заданий уровня ЕГЭ, в том числе заданий прошлых лет, опубликованных на сайте ФИПИ.

При проверке решений школьников на уроке учителю следует проверять именно математическую корректность и обоснованность решения, а не только совпадение ответа или, напротив, совпадение решения с тем или иным «эталоном».

Задание 16 – практико-ориентированная задача. Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 2.

Пример 1

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Пример 2

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1260 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 1260 тыс. рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Комментарий. Задание полностью верно выполнили около 30 % участников экзамена. Задание имеет практико-ориентированный характер и позволяет участнику экзамена продемонстрировать умения анализировать условие задачи, составлять математическую модель и находить обоснованный ответ, используя изученные математические методы. К сожалению, ряд учителей вместо развития умения составлять математическую модель «натаскивает» учеников на конкретные алгоритмы решения заданий прошлых лет или даже начинает рассказывать элементы экономической теории. Следует отметить, что для успешного решения задачи все необходимые сведения приведены в ее условии, никаких дополнительных знаний не требуется. Ключевой причиной, по которой участник экзамена не приступает к решению задачи или неверно составляет математическую модель, является как раз попытка безуспешно применять буквально алгоритм решения задания прошлых лет. Важно отметить, что подавляющее большинство участников экзамена, нашедших путь решения, верно доводят его до конца, что свидетельствует о росте математической культуры выпускников.

Задание 17 – геометрическая задача (планиметрия). Задание повышенного уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 3.

Пример 1

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

- а) Докажите, что $AC = CE$.
- б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Пример 2

Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

- а) Докажите, что $AC = 9$.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

Комментарий. Задание верно выполнили чуть меньше 10 % участников экзамена. Высокий уровень выполнения геометрических заданий части 1 экзамена создает хорошие предпосылки для роста выполнения геометрических заданий части 2. Однако, к сожалению, во многих школах все еще уделяется недостаточное внимание преподаванию геометрии на уровне основного общего образования, и если ликвидировать пробелы в решении задач базового уровня сложности и анализе простейших геометрических конструкций за время повторения реально, то сформировать культуру рассуждений и доказательств, необходимых для полноценного решения многоходовой задачи, крайне тяжело. Введение в рамках обновленного ФГОС углубленного курса геометрии в основной школе, обновление содержания курса геометрии, с акцентом на развитие геометрических представлений, геометрической интуиции, культуры рассуждений и доказательств создают хорошую основу для улучшения геометрической подготовки абитуриентов технических вузов и успешности выполнения данного задания.

Задание 18 – уравнение с параметром. Задание высокого уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 4.

Пример 1

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре различных решения.

Пример 2

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ y = \sqrt{x + 4} \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

Комментарий. Задание верно выполнили 5 % участников экзамена. Для решения этой задачи требуется систематическое формирование соответствующих умений начиная с основной школы. К сожалению, многие учителя не уделяют необходимого внимания изучению предусмотренного ФГОС углубленного уровня основной школы аналитического материала, связанного с простейшими функциями, что не позволяет создать необходимую базу для изучения соответствующего материала в старшей школе.

Задание 19 – целочисленная арифметика, перебор вариантов, доказательство. Задание высокого уровня с развернутым ответом, максимальный балл – 4.

Пример 1

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Пример 2

Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a; b)$ получается пара $(3a + b; 3b - a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару $(5; 5)$?

б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d; c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?

в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $|a - c| + |b - d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары $(9; 2)$ до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

Комментарий. Задание полностью верно выполнили 15 % участников экзамена. Оно позволяет участнику экзамена продемонстрировать сформированность математической культуры, умение применять изученные методы в нестандартной ситуации решения задач, в которой главным является не преодоление технических сложностей, а поиск пути решения. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас проверки подтверждения или опровержения гипотез.

Следует отметить ряд характерных недочетов, связанных с обоснованностью приведенного участником экзамена ответа. При ответе «Да» на вопросы с формулировками «Может ли?» и «Можно ли?» необходимо привести подтверждающий пример, удовлетворяющий условию задачи. Если ответ на эти вопросы «Нет», то участнику экзамена в решении необходимо показать противоречие или с условием задачи, или с общеизвестным математическим фактом. Частой ошибкой при ответе «Нет» является установление противоречия для какого-нибудь приведенного примера.

Задача имеет очень высокий потенциал роста, для ее выполнения важны регулярное решение нетиповых заданий с акцентом на развитие мышления, логики, а не только на развитие технических навыков. Наиболее эффективно формировать такие навыки начиная с 5–6 классов. Первый пункт задачи имеет конструктивный характер, и его выполнение посильно многим участникам экзамена, поэтому последние годы задача стала приобретать популярность не только у наиболее сильной группы, но и у выпускников с недостаточной общей алгебраической подготовкой, но развитым логическим мышлением. Здесь важно, чтобы учитель верно сориентировал, показал на примерах, что первый пункт не требует специальных знаний – достаточно умения понять условие задачи, небольшой сообразительности и минимального терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию. В старших классах и во время итогового повторения также необходимо использовать решения разнообразных по тематике несложных нетиповых задач, которые имеются в достаточном количестве в банке ФИПИ, открытых банков массовых олимпиад (в том числе школьного этапа ВсОШ), обновленных школьных учебников, позволяющих интегрировать основное и дополнительное образование.

На ЕГЭ по математике профильного уровня участники продемонстрировали уверенные навыки решения уравнений и преобразований алгебраических выражений, выполнения вычислений и составления математических моделей, чтения графиков и исследования функций.

Большинство участников экзамена успешно справилось с заданиями по вероятности и статистике, причем как базового, так и повышенного уровня. При этом количество неверных ответов в задачах базового уровня невелико, что говорит о снижении вычислительных ошибок, понимании числовых границ полученного ответа, проведении верного анализа условия, понимании алгоритма нахождения вероятности случайного события.

Задачи, связанные с основами математического анализа, показывают уверенное владение участниками экзамена ключевыми понятиями: «функция», «экстремум функции», «наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке», «производная функции».

В 2024 г. наблюдается рост успешности решения геометрических задач, в том числе задач по стереометрии базового и повышенного уровней. Во многом этому способствуют развитость у выпускников пространственного представления геометрических тел и предложенные в условии задачи готовые чертежи с заданными геометрическими фигурами. Участники экзамена успешно справились с впервые включенным в КИМ заданием на выполнение действий с векторами. Следует отметить и снижение количества неверных ответов в задачах по планиметрии базового уровня сложности, что говорит о преимущественно осознанном выборе экзамена ЕГЭ по математике профильного уровня.

В 2024 г. отмечается заметно более качественное, чем в прошлые годы, решение заданий повышенного и высокого уровней сложности. Участники экзамена:

- успешно решали тригонометрические уравнения и выполняли отбор корней, принадлежащих указанному промежутку;
- находили множество решений показательных неравенств;
- уверенно анализировали условие и составляли математическую модель в задаче с экономическим содержанием.

Следует отметить и положительную динамику в снижении количества вычислительных ошибок. У участников экзамена появилось понимание важности таких элементов решения, как выполнение проверки полученного корня уравнения, выявление ошибки оценкой порядка величины числа и реалистичности полученного результата.

Задача по планиметрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом в своем условии содержит два вопроса, один из которых – на доказательство, а другой – на вычисление значения заданной величины. При этом утверждение, предложенное для доказательства, может быть использовано в получении ответа на второй вопрос. Такая тактика продвижения в решении задачи участниками экзамена использовалась достаточно часто и свидетельствует о самостоятельности в поиске пути решения, хорошей геометрической эрудиции. Немаловажным условием успеха в решении таких задач играет предусмотренная на ЕГЭ возможность решить задачу разными способами, применять различные подходы и методы решения.

Сохранилась положительная динамика в результативности решения первых пунктов задачи высокого уровня на анализ числовых зависимостей. Участники экзамена, применяя различные математические рассуждения, давали обоснованные ответы, демонстрируя высокий уровень математической культуры и логического мышления.

Задачи высокого уровня сложности, для решения которых требуется применять несколько различных алгоритмов решения, проводить исследование заданной математической модели в зависимости от параметра, пока еще вызывают затруднения у участников экзамена. Однако наметилась тенденция к желанию у участников экзамена продвинуться в решении таких задач как можно дальше, получить промежуточный, но значимый результат.

В таблице 2 показано распределение процентов выполнения заданий по группам первичных баллов ЕГЭ по математике профильного уровня.

Таблица 2

Задание	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–4 ПБ	Группа 2, 5–10 ПБ	Группа 3, 11–17 ПБ	Группа 4, 18–32 ПБ
1	82,4	27,8	71,8	92,3	98,2
2	84,9	22,4	75,7	95,6	99,0
3	69,9	14,9	50,7	81,9	96,2
4	92,8	65,3	90,2	96,4	98,9
5	72,6	12,4	55,4	85,8	94,4
6	97,1	75,4	97,1	99,2	99,7
7	59,0	5,6	28,4	75,3	95,3
8	61,2	10,6	36,6	74,7	92,3
9	68,5	15,0	54,0	78,5	90,3
10	75,5	8,9	56,3	90,9	98,5
11	84,7	17,2	73,5	97,5	99,6
12	69,6	5,8	47,8	85,7	94,7

Задание	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–4 ПБ	Группа 2, 5–10 ПБ	Группа 3, 11–17 ПБ	Группа 4, 18–32 ПБ
13	47,0	0,2	7,6	64,4	94,8
14	4,0	0,02	0,13	1,1	19,1
15	27,3	0,01	0,7	25,5	88,0
16	28,8	0,09	2,4	28,9	85,3
17	8,6	0,04	0,33	3,8	36,9
18	5,2	0,0	0,02	0,74	26,3
19	15,4	2,5	7,4	15,4	34,2

Выделяется задание 19, которое на 1 балл выполняют около 7 % участников из группы 1 и около 11 % участников из группы 2. Похожие результаты выполнения этого задания наблюдались и в прошлые годы. Это говорит о том, что в этих группах есть участники, обладающие математической культурой, достаточно высокой для того, чтобы разобраться в тексте абстрактной математической задачи, экспериментировать с натуральными числами или целыми последовательностями и найти пример, удовлетворяющий условию задачи. При этом эти участники не выполняют, казалось бы, простейшие алгоритмы решения тригонометрических уравнений. Таким образом, проявляется существование заметной доли выпускников школ, которые не в полной мере осваивают основную программу по математике, несмотря на то что обладают более чем достаточными для этого математическими способностями. Следует отметить: данное задание показывает также степень развития математической культуры, умения найти путь решения задачи в новой ситуации, навыков логического мышления, что является одним из основных личностных результатов математического образования профильного уровня.

Важно отметить, что в 2024 г. сохранился заметный разрыв между уровнями алгебраической и геометрической подготовки выпускников. Наиболее ярко сравнительный анализ успешности освоения курса алгебры и курса геометрии виден на результатах наиболее успешной группы 4. При этом достаточно ограничиться заданиями 13–19 части 2, поскольку задания части 1 участники из этой группы выполняют практически полностью.

Если задания 13, 15, 16, 18 и 19 на полный балл выполняют соответственно 95,4 %, 86,3 %, 63,2 %, 57,5 % и 15,9 % участников из группы 4, то задания 14 и 17 на полный балл выполняют лишь 10,6 % и 13,9 % участников. Основная причина – в том, что даже у наиболее подготовленных школьников геометрия вызывает опасения, в то время как главным ресурсом на экзамене является время. Конечно, задача 16 требует немало времени на выполнение и анализ чертежа, поиск ключевых элементов конфигурации, решения множества вспомогательных подзадач. Однако даже стандартная стереометрическая задача 14 у хорошо подготовленного и мотивированного участника экзамена занимает больше времени, чем, например, задача 16, которая требует объективно намного большего объема обработки информации, иногда составления таблицы, применения нескольких алгоритмов и арифметических вычислений с многозначными числами. Можно предположить, что участник экзамена, выполняющий задание 16 и пропускающий задание 14 или выполняющий его с ошибкой, не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках. При хорошей подготовке решение задачи 14 занимает в полтора-два раза меньше времени, чем задача 16, и не больше, чем задача 15.

Часто наиболее подготовленные участники, которые заранее планируют время и выстраивают тактику решения задач на экзамене, относят решение стереометрической задачи на оставшееся время. Отработка стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, правильной пирамиды по-прежнему остается неиспользованным ресурсом повышения уровня математической подготовки выпускников.

В прошлом году в наиболее многочисленной группе 2 явно выделялась «граница успешности», совпадающая с границей между заданиями с кратким и развернутым ответами. В этом году эта «граница» проявляется еще ярче. Задания 1–12 в группе 2 выполняют не менее чем 42,4 %. Задание 13 – наиболее успешное задание части 2 – выполнено лишь на уровне 11,6 %. Возникает предположение, что значительная часть, если не большинство, участников из этой группы попадают в нее лишь потому, что не обучены математической речи в той степени, которая необходима для ясного изложения мыслей при выполнении заданий с развернутым ответом. При этом у них отмечается высокий уровень математического мышления, техника математических преобразований и вычислений может быть достаточно развита. Можно также предположить, что проблема кроется в злоупотреблении письменными видами работы, тестами, краткими ответами; при этом школьники имеют мало практики в устных ответах, развернутых письменных математических сочинениях. Такой школьник может решить уравнение или неравенство, понимает математический смысл задачи, но в силу отсутствия практики не может ясно и последовательно записать решение.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня могут оказать материалы, размещенные на сайте ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2025 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ по математике профильного уровня;
- Методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2021–2024 гг.);

Также будут полезны материалы межведомственного проекта Рособнадзора, Минобрнауки и Минпросвещения России, размещенные на сайте <https://физикадлявсех.рф/>.

Важнейшим фактором повышения числа успешно сдающих ЕГЭ по математике профильного уровня является переход к углубленному изучению математики с 7 класса.

Существенным недостатком в подготовке к ЕГЭ по математике является непрерывное решение с обучающимися вариантов экзамена прошлых лет (или из сборников типовых вариантов), обусловленное стремлением разобрать как можно больше типов задач. Целесообразно наряду с системным изучением школьного курса математики проводить уроки и занятия тематического повторения, уделять особое внимание решению задач, которые обучающиеся решают уверенно.

Основное внимание при подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации должно быть сосредоточено на подготовке именно к выполнению части 1 (тестовой) экзаменационной работы. Для успешного выполнения заданий 13–17 необходим дифференцированный подход в работе с наиболее подготовленными учащимися. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагаемых учащимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

Следует обратить внимание на развитие метапредметных умений и навыков обучающихся в процессе решения задач. Необходимо уделять внимание способам установления зависимости: между величинами в задаче, между условием и вопросом, между результатом решения составленной математической модели и условием (интерпретацией результата). Важным условием успешности является обсуждение различных подходов и методов решения одной и той же задачи, сравнения различных способов решения, их трудоемкости и способов упрощения. Целесообразно на уроках повторения, обобщения и систематизации знаний явно выделять, какой математический факт или какое утверждение стали ключевыми в решении, и позволили успешно решить задачу.

Необходимо обратить внимание на изучение геометрии не только непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета, но и наглядных аспектов геометрии в 5–6 классах и начальной школе. Обучающиеся в ходе изучения геометрии должны последовательно овладевать навыками и методами решения задач. Важно

обращать внимание на возможность применения разных подходов и способов решения одной и той же задачи, всесторонне показывать, что нет необходимости искать единственный путь решения предложенной задачи, даже вариативность нахождения промежуточных элементов должна быть обсуждена на уроке.

Для успешного выполнения задания 15 (решение неравенств) необходимо обратить внимание на изучение метода интервалов при решении неравенств. Именно формальное применение этого метода приводит к большому количеству ошибок у участников экзамена, причем важно сформировать устойчивые умения решения неравенств еще в курсе алгебры основной школы.

Необходимым условием успешной подготовки учащихся к сдаче ЕГЭ для учителя является в первую очередь изучение и осмысление нормативных документов: кодификатора элементов содержания КИМ и спецификации экзаменационной работы по математике ЕГЭ. Эти документы публикуются вместе с демонстрационными вариантами ЕГЭ.

При организации дифференцированного обучения учащихся 10–11 классов к ЕГЭ по математике профильного уровня необходимо учитывать результаты 2024 г. и организовывать группы с акцентом на темах, которые вызвали затруднения:

- «Планиметрические задачи на нахождение геометрических величин»;
- «Стереометрические задачи на нахождение геометрических величин»;
- «Решение рациональных, дробно-рациональных, квадратных, показательных, логарифмических неравенств и их систем»;
- «Текстовые задачи»;
- «Производные и первообразные элементарных функций», «Наибольшее и наименьшее значения функции. Экстремумы».

При организации образовательного процесса нужно соблюдать соотношение количества уроков алгебры, геометрии и теории вероятностей и статистики.

Систему контроля знаний, умений и навыков обучающихся надо выстраивать, исходя из организации дифференцированного обучения посредством практикумов, содержащих наборы задач по разным темам, допускающие в том числе и самопроверку. Это позволит обучающимся из «группы риска» отработать умения в решении более простых задач, а более подготовленным обеспечить быстрый переход к решению задач повышенного уровня.

Безусловно, даже при подготовке к экзамену на профильном уровне внимание учащихся должно быть сосредоточено именно на выполнении заданий с кратким ответом. И дело не в том, что успешное выполнение этих заданий обеспечивает получение удовлетворительного тестового балла, а в том, что это дает возможность обеспечить повторение значительно большего объема материала, сосредоточить внимание учащихся на обсуждении подходов к решению тех или иных задач, выбору способов их решения и сопоставлению этих способов, а также на проверке полученных ответов на правдоподобие и т.п. При этом следует ориентироваться не только (и не столько) на демонстрационные варианты, но и на открытый банк задач, который содержательно соответствует минимальному уровню требований к подготовке учащихся. Но в процессе такой работы акцент должен быть сделан не на «натаскивание» учащихся на «получение правильного ответа в определенной форме», а на достижение или осознанности знаний, формирование умений применять полученные знания в практической деятельности, анализировать, сопоставлять, делать выводы, подчас в нестандартной ситуации. Таким образом, не следует в процессе обучения злоупотреблять тестовой формой контроля; необходимо, чтобы учащийся предъявлял свои рассуждения как материал для дальнейшего их анализа и обсуждения. Эти требования к преподаванию математики не являются новыми, но, к сожалению, в значительной степени остаются декларацией, которая плохо соотносится с действительностью. Безусловно, перестройка в подходе к процессу обучения требует перестройки в сознании не только учащихся, но и учителей, а значит, потребует весьма значительного времени.

Отдельное внимание следует уделять изучению стереометрии: традиционно задания по стереометрии имеют самые низкие проценты выполнения. Как уже было отмечено, во многом это связано с тем, что стереометрические задания не дают много первичных баллов, а для того, чтобы научиться их решать, требуется много сил и времени. Также это может быть следствием того, что вместо изучения стереометрии в старших классах большая доля времени уделяется решению простейших задач по планиметрии, обеспечивающих выпускникам удовлетворительные баллы на ЕГЭ. Необходимо органичное включение повторения планиметрии в курс стереометрии.

Учителям, собирающимся работать в 11 классе в 2024/25 учебном году, необходимо провести поэлементный анализ заданий, традиционно вызывающих затруднения у выпускников, используя методические материалы прошлых лет. Нужно включать задания, аналогичные КИМ ЕГЭ, при объяснении учебного материала, при решении задач по всем курсам математики, не ограничиваясь только учебником, и не заменять изучение тем по программе 11 класса «натаскиванием» на задания ЕГЭ.

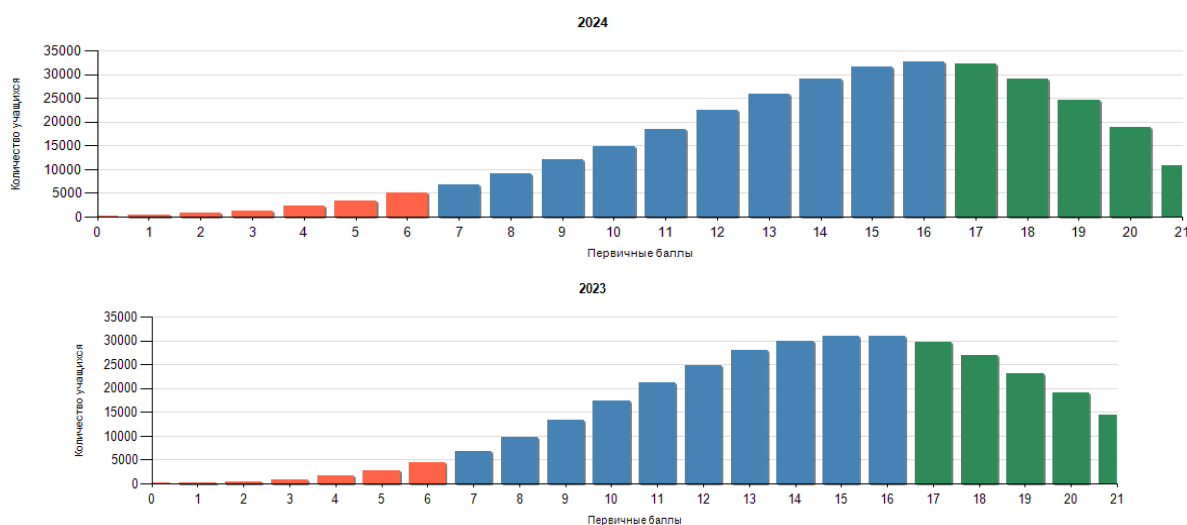
ЕГЭ 2024 г. по математике базового уровня

ЕГЭ по математике базового уровня предназначен для проведения государственной итоговой аттестации выпускников, не планирующих продолжения образования в профессиях, предъявляющих специальные требования к уровню математической подготовки. В КИМ ЕГЭ по математике базового уровня проверяется овладение ФГОС базового уровня по математике с акцентом на применение полученных знаний на практике, развитость логического мышления, сформированность умений работать с различной информацией и применять математический аппарат в массовых гуманитарных профессиях

КИМ ЕГЭ по математике базового уровня содержали 21 задание с кратким ответом базового уровня. В начале работы предложены практико-ориентированные задания, позволяющие участнику экзамена продемонстрировать умение применять полученные знания из различных разделов математики при решении практико-ориентированных задач, затем следуют блоки заданий по геометрии, алгебре и началам математического анализа.

Модель КИМ ЕГЭ базового уровня по сравнению с 2023 г. не изменилась.

На рис. 2 представлено распределение первичных баллов участников ЕГЭ по математике базового уровня в 2022–2024 гг.



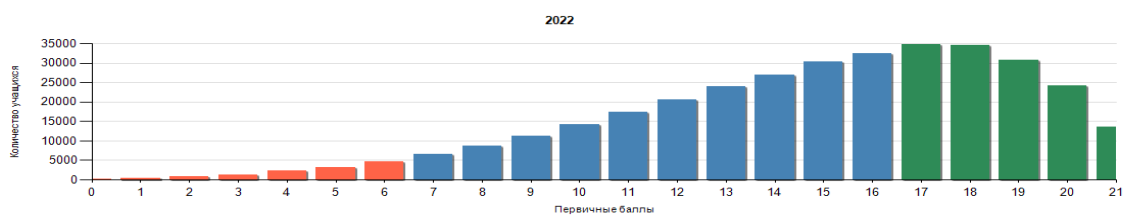


Рис. 2. Распределение первичных баллов ЕГЭ базового уровня в 2022–2024 гг.

По сравнению с 2023 г. в 2024 г. характер распределения первичных баллов практически не изменился.

В 2024 г. сохранилась долгосрочная тенденция роста математической подготовки выпускников школы, не планирующих поступать в вузы на специальности, в конкурсе на которые учитывается математика. В частности, если 10 лет назад аттестационный порог составлял три задания при высоком проценте неуспешности, то сейчас аттестационный порог 7 заданий, преодолевают около 96 % участников экзамена. Низкие результаты выпускников, получивших неудовлетворительную отметку за ЕГЭ по математике базового уровня, связаны со слабым освоением программы начальной и основной школы (в части слабых вычислительных навыков, недостаточных навыков смыслового чтения, неумения пользоваться алгоритмом решения задач и др.), что свидетельствует о несвоевременном выявлении и отсутствии необходимой работы по ликвидации пробелов в знаниях.

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь системно изучая математику во всем разнообразии ее методов. Также важно уделять должное внимание развитию логики. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ и другие общедоступные ресурсы.

Ниже рассмотрены результаты выполнения типичных заданий базового ЕГЭ по математике в 2024 г. с указанием вероятных причин низкой результативности ряда заданий.

В таблице 3 приведены результаты выполнения заданий базового ЕГЭ по темам.

Таблица 3

Код темы	Название темы	№ в КИМ	Уровень	Ср. % вып.
1.1	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел	1	Б	92
5.2	Логика	2	Б	95
1.1; 3.2	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке	3	Б	96
1.8; 2.1	Преобразование выражений. Целые и дробно-рациональные уравнения	4	Б	84
6.2	Вероятность	5	Б	82
1.1; 1.2; 1.8	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Преобразование выражений	6	Б	74
3.2; 3.3; 4.2	Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке. Степенная функция с натуральным и целым показателем. Её свойства	7	Б	86

Код темы	Название темы	№ в КИМ	Уровень	Ср. % вып.
	и график. Свойства и график корня n -ой степени. Применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке			
5.2	Логика	8	Б	89
7.1	Фигуры на плоскости	9	Б	83
7.1	Фигуры на плоскости	10	Б	80
7.3; 7.4	Многогранники. Тела и поверхности вращения	11	Б	40
7.1	Фигуры на плоскости	12	Б	58
7.3; 7.4	Многогранники. Тела и поверхности вращения	13	Б	59
1.2; 1.8	Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Преобразование выражений	14	Б	81
1.2	Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби	15	Б	84
1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.8	Арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями. Степень с целым показателем. Степень с рациональным показателем. Свойства степени. Синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента. Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Преобразование выражений	16	Б	62
2.1; 2.4	Целые и дробно-рациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения	17	Б	62
2.5	Целые и дробно-рациональные неравенства	18	Б	28,2
1.2; 1.3; 1.4; 1.6; 2.5; 2.7	Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями натуральной степени. Степень с целым показателем. Степень с рациональным показателем. Свойства степени. Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Целые и дробно-рациональные неравенства. Показательные и логарифмические неравенства	18	Б	33
1.1	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел	19	Б	46
1.1; 1.2	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел. Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби	20	Б	29
1.1	Натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел	21	Б	30

Для анализа выполнения заданий КИМ ЕГЭ использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2024 г. Каждое из использованных для анализа заданий выполняли не менее 7000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной.

Варианты КИМ ЕГЭ по математике базового уровня полностью состояются из заданий, представленных в открытом банке заданий. Наличие открытого банка заданий

позволяет учителю использовать эти задания как при обучении, так и при организации повторения.

Задание 1. Текстовая задача практического содержания.

Пример 1

Стоимость проездного билета на месяц составляет 580 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 20 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 41 поездку. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Пример 2

В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 3 недели?

Комментарий. Задание верно выполнили больше 90 % участников экзамена. Данное задание показало, что у 8 % участников экзамена есть сложности с построением простейшей математической модели, недостаточно сформированы арифметические навыки и, как следствие, заведомо есть сложности в освоении не только курса математики, но и курсов других естественных наук. Необходимо своевременно выявлять указанные пробелы и ликвидировать их путем систематических упражнений.

Задание 2. Практическая задача на проверку сформированности у выпускника представлений о величине – массе, времени, длине.

Пример 1

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) рост жирафа	1) 500 см
Б) радиус Земли	2) 6400 км
В) ширина футбольного поля	3) 68 м
Г) толщина лезвия бритвы	4) 0,08 мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Пример 2

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса куриного яйца	1) 130 т
Б) масса активного вещества в таблетке	2) 250 мг
В) масса литрового пакета сока	3) 55 г
Г) масса взрослого кита	4) 1 кг

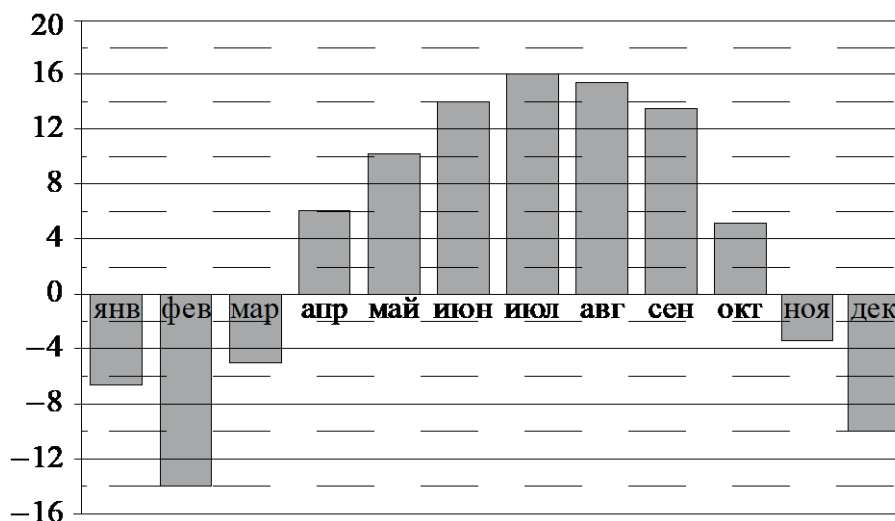
В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Комментарий. Задание верно выполнили 95 % участников экзамена. Высокая успешность выполнения задания обусловлена тем, что для получения верного ответа достаточно владеть читательской грамотностью и элементарными жизненными представлениями о величине (в данном случае о массе и длине).

Задание 3. Практико-ориентированная задача на чтение графиков, диаграмм.

Пример 1

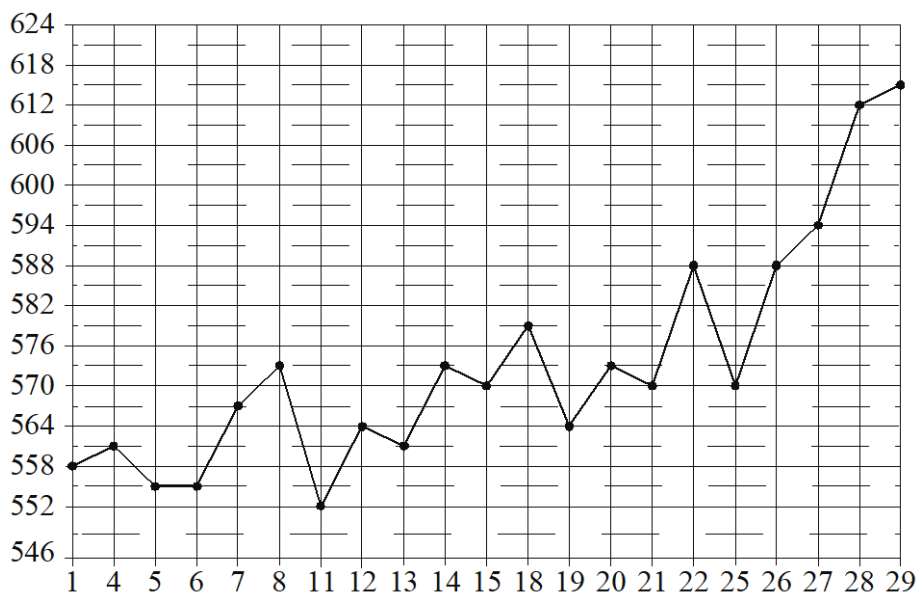
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы; по вертикали — температура в градусах Цельсия.



Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в Нижнем Новгороде в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Пример 2

На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком России на все рабочие дни в октябре 2010 года. По горизонтали указаны числа месяца; по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку наименьшую цену палладия в период с 14 по 26 октября включительно. Ответ дайте в рублях за грамм.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 95 % участников экзамена. Высокая успешность выполнения задания обусловлена тем, что для получения верного ответа достаточно владеть чтением графиков и диаграмм, применяемых в реальной жизни.

Задание 4. Текстовая задача на вычисление по формуле.

Пример 1

В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 150 рублей. Если поездка длится 5 минут или дольше, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 150 + 11(t - 5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t \geq 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 16-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

Пример 2

Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где a — сторона, α — противолежащий ей угол треугольника. Пользуясь этой

формулой, найдите радиус R , если $a = 8$ и $\sin\alpha = \frac{1}{7}$.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 80 % участников экзамена. Основные ошибки, которые допустили участники экзамена, связаны с неверной последовательностью проводимых вычислений для получения требуемого значения после выполнения подстановки в формулу.

Задание 5. Задача по теории вероятностей.

Пример 1

Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 60 докладов: первые два дня — по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется случайным образом. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Пример 2

Фабрика выпускает сумки. В среднем из 125 сумок, поступивших в продажу, 5 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется со скрытым дефектом.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 80 % участников экзамена. Основные ошибки связаны с неверным представлением обыкновенной дроби в виде десятичной.

Задание 6. Текстовая задача практического содержания.

Пример 1

Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	0,9 руб. за 1 Мб
План «400»	432 руб. за 400 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 400 Мб
План «800»	736 руб. за 800 Мб трафика в месяц	0,3 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 650 Мб в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 650 Мб?

Пример 2

В таблице приведены данные о шести чемоданах.

Номер чемодана	Длина (см)	Высота (см)	Ширина (см)	Масса (кг)
1	105	55	42	23
2	97	65	44	24
3	100	58	46	22,5
4	85	69	52	25
5	103	57	47	24,5
6	92	65	40	20

По правилам авиакомпании сумма трёх измерений (длина, высота, ширина) чемодана, сдаваемого в багаж, не должна превышать 203 см, а масса не должна быть больше 23 кг. Какие чемоданы можно сдать в багаж по правилам этой авиакомпании?

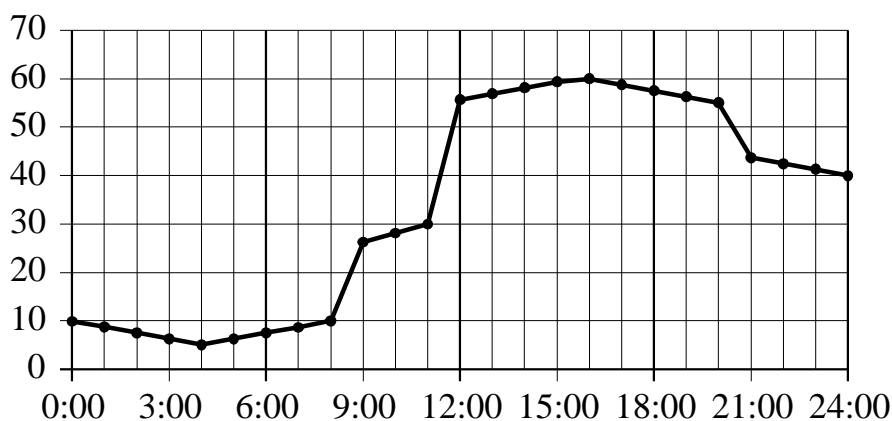
В ответе укажите номера всех выбранных чемоданов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Комментарий. Задание верно выполнили около 75 % участников экзамена. Высокая успешность выполнения этого задания говорит о том, что основная часть участников экзамена владеет умениями: извлекать необходимую информацию из текста задачи, табличных данных; строить математическую модель в виде числового выражения, выполняя вычисления с натуральными числами, находить его значение; проводить оценку полученного результата в соответствии с условием задачи.

Задание 7. Графическое представление процесса или функции.

Пример 1

На рисунке точками показано потребление воды городской ТЭЦ на протяжении суток. По горизонтали указывается время; по вертикали — объём воды в кубометрах в час. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику потребления данной ТЭЦ воды в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

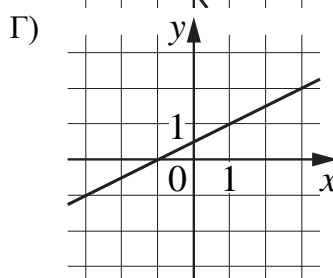
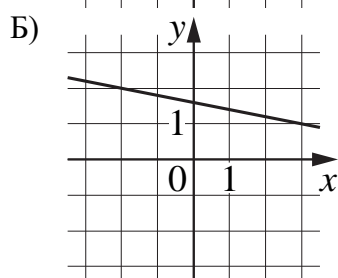
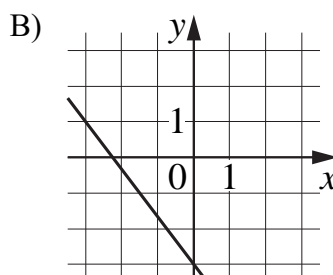
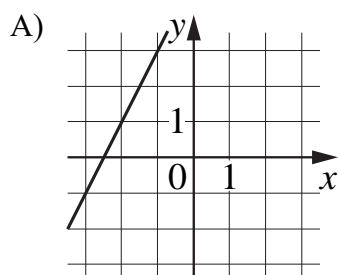
- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------|
| А) ночь (с 0 до 6 часов) | 1) Потребление воды падало в течение всего периода. |
| Б) утро (с 6 до 12 часов) | 2) Потребление воды достигло максимума за сутки. |
| В) день (с 12 до 18 часов) | 3) Отмечался наибольший рост потребления воды за сутки. |
| Г) вечер (с 18 до 24 часов) | 4) Потребление воды сначала падало, а потом росло. |

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Пример 2

На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и угловыми коэффициентами прямых.

ГРАФИКИ



УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

- 1) 2
- 2) $-\frac{4}{3}$
- 3) $-0,2$
- 4) 0,5

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 85 % участников экзамена. Высокий процент выполнения данного задания означает, что у участников экзамена сформированы базовые умения извлекать необходимую информацию из текста и графика, проводить сравнения, находить закономерности, делать выводы, отвечать на вопрос задачи в соответствии с конкретной ситуацией практического содержания, описанной в тексте задания.

Задание 8. Логические высказывания.

Пример 1

Перед футбольным турниром измерили рост игроков футбольной команды города N. Оказалось, что рост каждого из футболистов этой команды больше 170 см и меньше 190 см. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) В футбольной команде города N обязательно есть игрок, рост которого равен 160 см.
- 2) В футбольной команде города N нет игроков с ростом 169 см.
- 3) Разница в росте любых двух игроков футбольной команды города N составляет больше 20 см.
- 4) Рост любого футболиста этой команды меньше 190 см.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Пример 2

В посёлке городского типа всего 17 жилых домов. Высота каждого дома меньше 25 метров, но не меньше 5 метров. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

- 1) В посёлке нет жилого дома высотой 4 метра.
- 2) В посёлке есть жилой дом высотой 25 метров.
- 3) Высота любого жилого дома в посёлке не меньше 3 метров.
- 4) Разница в высоте любых двух жилых домов посёлка больше 6 метров.

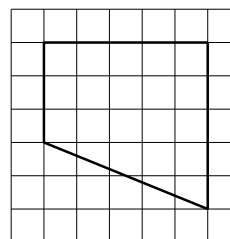
В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Комментарий. Задание верно выполнили около 90 % участников экзамена. Это задача практического содержания, проверяющая умения: работать с текстом; устанавливать логические связи между утверждениями, представленными в тексте задачи; рассуждать, строить логические умозаключения по условию задачи; устанавливать следственные связи между событиями в практической ситуации; отвечать на вопрос задачи, определяя истинность или ложность утверждений. Высокий процент выполнения данного задания означает, что базовые логические навыки есть почти у всех выпускников школы; при своевременном выявлении пробелов в знаниях, правильном построении курса математики многие участники, имеющие по результатам отметку 3 или 4, могут успешно решать и алгебраические, и геометрические задания, а также иметь более высокий результат освоения курса математики.

Задание 9. Планиметрия на клетчатом плане.

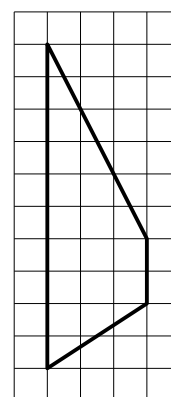
Пример 1

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат $1\text{ м} \times 1\text{ м}$. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Пример 2

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат $1\text{ м} \times 1\text{ м}$. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

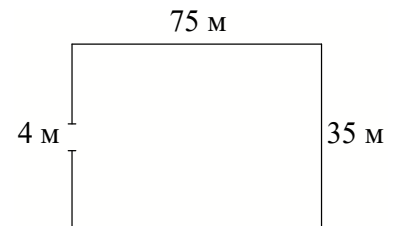


Комментарий. Задание верно выполнили больше 80 % участников экзамена. Результаты выполнения показали, что планиметрическая задача практического содержания, проверяющая умения: понимать жизненную ситуацию, описанную в условии задачи; выполнять действия с геометрическими фигурами, дополнительные построения на чертеже; строить математическую модель по условию задачи в виде числового выражения, используя свойства геометрических фигур, – не вызывает затруднений у участников экзамена.

Задание 10. Геометрическая задача практического содержания.

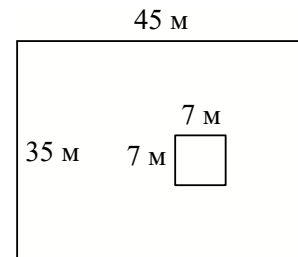
Пример 1

Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 35 м и 75 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно обнести участок, предусмотрев проезд шириной 4 м.



Пример 2

Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 35 м и 45 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 7 м. Найдите площадь части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.

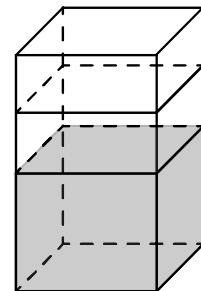


Комментарий. Задание верно выполнили 80 % участников экзамена. Результаты выполнения показали, что планиметрическая задача практического содержания, проверяющая умения: понимать жизненную ситуацию, описанную в условии задачи; выполнять действия с геометрическими фигурами, дополнительные построения на чертеже; строить математическую модель по условию задачи в виде числового выражения, используя свойства геометрических фигур, – не вызывает затруднения у участников экзамена.

Задание 11. Наглядная стереометрия.

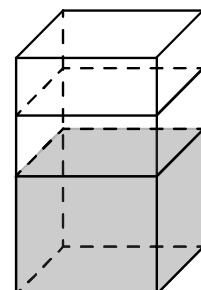
Пример 1

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы, налито 5 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,4 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



Пример 2

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания 20 см, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 15 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

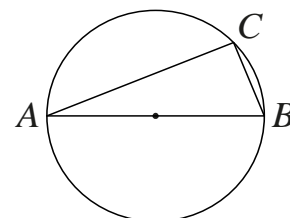


Комментарий. Задание верно выполнили 40 % участников экзамена. Сложность при решении задачи возникла из-за формализации условия практической ситуации для применения известных формул нахождения объема тела, а также из-за непонимания физического смысла нахождения объема тела при погружении его в воду.

Задание 12. Геометрическая задача (планиметрия).

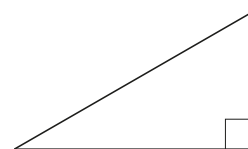
Пример 1

На окружности радиусом $\sqrt{10}$ отмечена точка C . Отрезок AB — диаметр окружности, $AC = 6$. Найдите длину хорды BC .



Пример 2

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $\sqrt{41}$, а один из катетов равен 4.

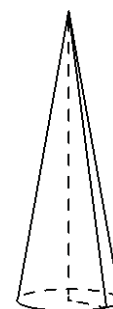


Комментарий. Задание верно выполнили 58 % участников экзамена. Низкая выполняемость задания свидетельствует о несформированности умения решать планиметрические задачи на нахождение сторон прямоугольного треугольника.

Задание 13. Геометрическая задача по стереометрии.

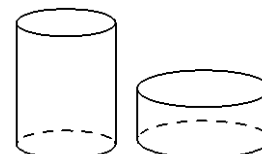
Пример 1

Объем конуса равен 6π , а радиус его основания равен 1. Найдите высоту конуса.



Пример 2

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 2 и 6, а второго — 6 и 4. Во сколько раз объем второго цилиндра больше объема первого?



Комментарий. Задание верно выполнили около 60 % участников экзамена. Базовое вычислительное задание по стереометрии с заданным чертежом доступно для решения и большей доле участников экзамена. Необходимо в ходе повторения и обобщения знаний уделить больше внимания поиску соответствующих формул в справочном материале, а в основном курсе сформировать навыки их применения и уделить больше внимания решению задач наглядной стереометрии.

Задание 14. Вычисление значения выражения.

Пример 1

Найдите значение выражения $\frac{5}{6} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}$.

Пример 2

Найдите значение выражения $(6,8 - 1,3) \cdot 7,2$.

Комментарий. Задание верно выполнили 81 % участников экзамена. Основные ошибки при выполнении задания связаны с порядком выполняемых действий.

Задание 15. Текстовая задача на проценты.

Пример 1

Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5 %. Книга стоит 280 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Пример 2

В технических вузах собираются учиться 10 выпускников школы. Они составляют 40 % от общего числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

Комментарий. Задание верно выполнили более 80 % участников экзамена. Допущенные ошибки свидетельствуют о неверном применении алгоритма нахождения числа по его процентам, неверном соотношении по данным условиям задачи стоимости или численности выпускников найденным величинам. Необходимо продолжать работу по переносу акцентов в изучении математики с формальных технических упражнений на развитие навыков математического мышления, умений применять математику при решении практических задач, верно интерпретировать полученный в ходе решения результат, в том числе промежуточный.

Задание 16. Нахождение значения числового выражения.

Пример 1

Найдите значение выражения $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10}$.

Пример 2

Найдите значение выражения $\frac{3^{-7} \cdot 3^2}{3^{-9}}$.

Комментарий. Задание верно выполнили 62 % участников экзамена. Основные ошибки связаны с неверным применением свойств квадратного корня и степени.

Задание 17. Уравнение.

Пример 1

Найдите корень уравнения $-3 + 4(-7 + 5x) = 9x - 9$.

Пример 2

Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 = 0$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 60 % участников экзамена. В решении линейного уравнения ошибки связаны с неверным раскрытием скобок и неравносильными преобразованиями. В решении квадратного уравнения наблюдается ошибочность в применении стандартного алгоритма нахождения корней.

Особо следует обратить внимание на необходимость выполнения проверки найденных корней, чтобы избежать возможной ошибки.

Задание 18.

Пример 1

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\frac{x-3}{(x-6)^2} > 0$	1) $(-\infty; 3) \cup (6; +\infty)$
Б) $(x-3)(x-6) > 0$	2) $(3; 6) \cup (6; +\infty)$
В) $5^{-x+2} > 0,2$	3) $(3; 6)$
Г) $\log_3(x-3) < 1$	4) $(-\infty; 3)$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Пример 2

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_5 x < 1$	1) $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$
Б) $\log_5 x > 1$	2) $\left(0; \frac{1}{5}\right)$
В) $\log_5 x < -1$	3) $(5; +\infty)$
Г) $\log_5 x > -1$	4) $(0; 5)$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Комментарий. Задание верно выполнили больше 30 % участников экзамена. Невысокая выполняемость задания обусловлена несформированностью умений решать базовые неравенства и соотносить полученные множества решений с предложенными в условии задачи.

Задание 19. Задача на применение свойств делимости натуральных чисел.

Пример 1

Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 4, и на 5, и на 6 даёт в остатке 2 и все цифры в записи которого чётные. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Пример 2

Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 6 и делится на 90. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Комментарий. Задание верно выполнили 46 % участников экзамена. При выполнении задания важно проводить проверку составленного числа.

Задание 20. Текстовая задача практического содержания.

Пример 1

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 18 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 306 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Пример 2

Расстояние между городами А и В равно 700 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В со скоростью 85 км/ч выехал второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 360 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий. Задание верно выполнили около 30 % участников экзамена. Низкий уровень выполнения задания показывает, что развитию умений верно составить математическую модель, решить полученную задачу и проверить ответ, к сожалению, внимание в школе уделяется недостаточно. Необходимо продолжать работу по переносу акцентов в изучении математики с формальных технических упражнений на развитие навыков математического мышления, умения применять математику при решении практических задач.

Задание 21. Логическая задача. Рассуждения, перебор вариантов.

Пример 1

Список заданий викторины состоял из 50 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 9 очков, за неправильный ответ с него списывали 17 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 153 очка, если известно, что, по крайней мере, один раз он ошибся?

Пример 2

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж забыл сказать. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (Во всех подъездах число квартир на этаже одинаково, нумерация квартир в доме начинается с единицы.)

Комментарий. Задание верно выполнили 30 % участников экзамена. Для успешного выполнения такого задания необходимо верно интерпретировать условие задачи. Основные ошибки связаны с неверным пониманием предложенного сюжета.

Выполнение заданий по группам первичных баллов ЕГЭ 2024 г. по математике базового уровня показано в таблице 4.

Таблица 4

Задание / балл	Средний процент выполнения	Группа 1, 0–6 ПБ	Группа 2, 7–11 ПБ	Группа 3, 12–16 ПБ	Группа 4, 17–21 ПБ
1 / 1	91,8	46,8	83,1	94,2	98,6
2 / 1	94,8	80,8	91,6	95,1	97,7
3 / 1	96,3	72,5	92,7	97,5	99,4
4 / 1	83,5	17,0	58,5	88,7	98,0
5 / 1	81,7	14,0	55,3	86,6	97,6
6 / 1	74,1	23,6	53,0	74,1	90,9
7 / 1	85,8	52,6	72,0	86,9	95,7
8 / 1	89,4	54,3	80,5	90,4	97,1
9 / 1	83,4	20,7	58,8	87,8	98,1
10 / 1	80,3	13,1	51,1	84,9	97,6
11 / 1	39,6	1,8	8,9	29,1	72,9
12 / 1	58,3	4,2	16,0	55,5	90,4
13 / 1	59,3	4,8	17,1	55,2	92,8
14 / 1	81,4	15,9	54,3	86,2	97,5
15 / 1	83,7	15,5	58,2	89,1	98,4
16 / 1	62,2	10,0	33,3	57,7	89,0
17 / 1	62,6	4,8	21,3	59,8	94,5
18 / 1	32,5	3,6	6,8	18,7	66,2
19 / 1	45,6	3,2	14,0	38,1	76,3
20 / 1	29,3	3,7	10,0	23,5	49,6
21 / 1	30,0	4,5	10,3	19,7	56,0

Группа 1 имеет явные особенности в выполнении отдельных заданий. Участники экзамена из этой группы не справляются с геометрическими заданиями (задания 11–13), с решением тестовой задачи на вычисление и преобразование (задание 19), с заданием на исследование простейших математических моделей на конструирование числа (задание 20). Группа 1 хорошо справляется только с задачей на чтение графиков и диаграмм (задание 3) и задачей на построение и исследование простейшей математической модели для практической ситуации (задача 6). Можно сделать вывод о том, что значительная часть участников, получивших тестовый балл 2, незнакома с математическими фактами курса средней школы.

Группа 2, в целом испытывая те же трудности, что и группа 1, все же выполняет большую часть задач на уровне выше 40 %. Наиболее низкие результаты – по геометрии. Другие массовые особенности при анализе агрегированной статистики и вееров ответов не выявлены.

В группе 3 «провалы» в геометрии также имеются. И даже в группе 4 задача 13 (наглядная стереометрия) вызывает определенные трудности, в выполнении этой задачи самый низкий результат, за исключением последней, где требуются нестандартные рассуждения.

В группу заданий, с которыми участники экзамена в целом справились несколько хуже, чем с другими, но на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, так и задания, «перешедшие» из основной

школы: нахождение значения числового выражения; преобразование выражения, содержащий арифметический квадратный корень; решение практической задачи с процентами; решение логарифмического уравнения; решение планиметрической задачи; решение вероятностной задачи на работу с информацией, представленной в таблице; решение планиметрической задачи; решение стереометрической задачи на вычисление объема круглого тела; выполнение задания с числовыми неравенствами, задания с числами.

Выделим наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать.

Группа 1. Эту группу можно кратко охарактеризовать как выпускников, имеющих слабую математическую подготовку, в том числе плохо умеющих считать. Безусловно, внимание учителя и родителей должно быть направлено в первую очередь на развитие устойчивых навыков бытового счета, умения находить часть от числа и число по его части. Вряд ли есть смысл глубоко изучать с такими обучающимися в старшей школе тригонометрические и другие функции: их основная проблема – полное отсутствие базовой арифметической подготовки. Участники из данной группы, как правило, имели очень низкие результаты на ОГЭ. Необходимо своевременно (не позднее чем в начале учебного года, а желательно в 10 классе) выявлять учеников, потенциально входящих в такую группу, и организовывать индивидуальную подготовку, в том числе по ликвидации пробелов начальной и основной школы. Школам, в которых высока доля участников из данной группы, следует обратить особое внимание на качество математического образования в 5–6 классах и начальной школе.

Заметим, говоря о группах 2 и 3, что, помимо слабого решения геометрических задач, эти участники ЕГЭ не имеют «провалов». Недостаточная отработка вычислительных навыков и невнимательность в чтении условия – основные проблемы этой группы участников. Здесь также следует добиваться отработки уже имеющихся навыков, прежде чем браться за более сложные умения или новые объекты. Вместе с тем важно обратить большее внимание на решение типовых задач по геометрии, не отказываясь от изучения геометрии ради алгебры. Но вместо рассмотрения теорем и решения абстрактных задач лучше сосредоточиться на простых практико-ориентированных задачах, в которых фигурирует объем цилиндра, наглядное деление фигуры на две части, видимое подобие, а также используются простые планы и чертежи на клетчатой бумаге.

Группа 3 наиболее массовая. Учитель обычно хорошо умеет работать именно с такими школьниками. Повторив все рекомендации, актуальные для группы 2, отметим, что здесь учитель может опираться на имеющиеся вычислительные навыки; следовательно, нужно давать больше задач на оценку и прикидку, на сопоставление результата со здравым смыслом и жизненным опытом при решении не только практико-ориентированных, но и типовых задач школьной геометрии и алгебры.

Несмотря на наличествующие вычислительные навыки обучающиеся с соответствующей группе 3 подготовкой испытывают некоторый дефицит опыта в преобразовании логарифмов, корней и степеней. Следовательно, при подготовке к ЕГЭ целесообразно чаще включать в тренировочные материалы несложные преобразования функций с целью выработать навык с помощью многократного повторения.

Группа 4 – пограничная между базовым и профильным экзаменами. Вероятно, значительная часть участников экзамена, попавших в эту группу, в состоянии успешно сдать профильный экзамен. Учителю важно понимать, насколько разумен выбор базового экзамена для потенциально сильного ученика, и вести соответствующую профориентационную работу вместе с региональными вузами.

Анализ результатов ЕГЭ по математике базового уровня в 2024 г. позволяет сформулировать некоторые рекомендации учителям по совершенствованию процесса преподавания математики:

- обратить особое внимание на усиление системности и систематичности изучения учебного материала, что может быть достигнуто в результате постепенного накопления и последовательного усложнения изученного материала, периодически проводимого закрепления уже изученного;

- применять различные виды контроля знаний на уроках и во внеурочной деятельности;

- в работе с обучающимися уделять особое внимание организационной и психологической составляющим подготовки к экзамену, а также контролю времени и применению простых приемов самоконтроля; формировать у обучающихся умение длительного занятия математикой (экзамен профильного уровня продолжается практически 4 часа, а базового – 3 часа).

Наименее эффективным способом подготовки является «прорешивание» типовых вариантов ЕГЭ. Решение полных типовых вариантов следует проводить не чаще одного раза в месяц. Часть времени следует посвящать выполнению индивидуально подобранных тренингов по темам, которые вызывают затруднение у конкретных обучающихся.

Учителям необходимо: развивать самостоятельность мышления учащихся; использовать методы проблемного обучения; включать в работу на уроках и во внеурочной деятельности задания, которые направлены не на воспроизведение знаний и изученного алгоритма, тренировку памяти, а на формирование творческих способностей обучающихся, их способности мыслить, рассуждать, использовать и развивать свой интеллектуальный потенциал; сформировать у обучающихся в процессе подготовки к экзамену умения анализировать условие задания, извлекать из него информацию, сопоставлять приведенные в условии данные; систематически отрабатывать задания, нацеленные на поиск и переработку информации, представленной в различной форме (текст, таблица, схема), ее анализ и синтез, сравнение и классификацию.

Необходимо повышать уровень вычислительных умений, читать условие и вопрос задачи, записывать математически грамотно решение задачи. Особое внимание следует уделять формированию навыков самоконтроля и самопроверки выполненных заданий.