ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Москва, 2019

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ среднего общего образования по математике соответствующим требованиям федерального государственного образовательного стандарта. Для указанных целей используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы.

С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. Варианты КИМ составляются на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений. В 2019 г. участники экзамена могли выбрать только один из двух уровней. Это нововведение значительно повлияло на результаты обоих экзаменов.

Каждый вариант ЕГЭ 2019 г. по математике профильного уровня содержал 12 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развернутым ответом. Задания относились к основным разделам курса математики: числа и вычисления, алгебра и начала математического анализа, геометрия, теория вероятностей. Проверка логических навыков была включена в большинство заданий и особенно проявлялась в требованиях к решению заданий с развернутым ответом.

Каждый вариант ЕГЭ по математике базового уровня содержал 20 заданий с кратким ответом. Проверяя достижение требований стандарта, КИМ ЕГЭ по математике базового уровня имеют выраженную практическую направленность и включают в себя задания из всех разделов школьного курса математики.

1. ЕГЭ по математике профильного уровня

Вариант экзаменационных материалов по математике состоит из 19 заданий, сгруппированных в две части. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня, вторая часть содержит 11 заданий повышенного и высокого уровня сложности. Первые 12 заданий подразумевают краткий числовой ответ и оцениваются в 0 или 1 балл. Задания 13–19 политомические с развернутым ответом. В большинстве политомических заданий требования на промежуточные баллы определяются однозначно за счет разбиения задания на пункты а), б) и т.д.

Модель ЕГЭ по математике профильного уровня, сформировавшаяся к настоящему времени, способна выделить по результатам экзамена группу наиболее подготовленных участников, намеренных продолжать образование по техническим и математическим специальностям. В то же время экзамен содержит достаточный материал для диагностики общих математических умений, применяемых при изучении иных предметов и в быту, в массовых профессиях. В большинстве своем эти задания сгруппированы в первой части экзамена и охватывают широкий круг математических объектов, методов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, бытовые расчеты, оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий в простых ситуациях и т.п.

Задания второй части, как дихотомические, так и политомические, предназначены для проверки математических знаний на уровне, необходимом для абитуриентов технических и математических специальностей. Традиционно в их число входит исследование функций, задача по стереометрии, планиметрии, решение уравнений и неравенств.

Изменений в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня в 2019 г. по сравнению с 2018 г. не было.

Несмотря на отсутствие изменений в структуре и содержании КИМ, результаты участников экзамена в текущем году существенно отличаются от результатов 2018 г. Здесь проявились развивавшиеся в последние годы и давшие качественный скачок изменения в методике преподавания математики и в школьном математическом образовании в целом. Эти изменения во многом обязаны появлению ЕГЭ по математике базового уровня, который был введён в 2015 г. в соответствии с Концепцией развития математического образования, утвержденной Распоряжением Правительства РФ № 2506-р от 24.12.2013.

Вплоть до 2019 г. участник экзамена мог выбирать и сдавать оба уровня экзамена. В 2019 г. участники ЕГЭ могли сдавать экзамен только на одном из уровней. Отсутствие «подстраховки» в виде экзамена базового уровня, очевидно, повлияло на качество подготовки участников ЕГЭ профильного уровня. В результате заметно снизилась доля участников ЕГЭ, набравших баллы в диапазоне 0-60 т.б., и повысилась доля участников с высокими результатами - почти половина участников показали результаты выше 61 т.б. (в 2018 г. – около 32%).

Среди общих результатов ЕГЭ по математике 2019 г. следует отметить резкое снижение процента ошибок в ответах на задания первой части работы, особенно среди участников экзамена, получивших хотя бы 1 балл за выполнение заданий с полным решением. Это свидетельствует о росте качества подготовки выпускников в части техники выполнения математических операций.

Также следует отметить рост логической и алгоритмической культуры, что выразилось в заметном снижении процента неполных баллов в ряде заданий с полным решением – если участник экзамена находил путь решения, то во многих случаях давал полное решение. Например, задание 13 на 2 балла выполнили более 40% участников, а на 1 балл – менее 8%. Аналогичное явление наблюдается в заданиях 15, 16, 17. В то же время есть существенный резерв роста результатов (по заданиям 14, 18, 19) в части развития геометрической интуиции, логической культуры, умения работать с функциями.

Как было отмечено выше, изменение качественного состава когорты участников профильного экзамена само по себе недостаточно для наблюдаемого значительного улучшения результатов экзамена. Основную роль сыграл комплекс изменений, которые накапливались в математическом образовании страны в последние годы.

Среди основных причин следует указать следующие.

Начинает сказываться реализация мер по внедрению Концепции развития математического образования, в частности в ряде регионов в 2019 г. выпускалось заметное количество школьников, которые начали углубленное изучение математики с 7–8 класса. Именно эти регионы показали особенно высокий рост результатов.

Работа образовательного центра «Сириус» по развитию творческих способностей обучающихся в регионах (обучение свыше 3000 школьников в год в очной форме, свыше 10000 в среде «Сириус-онлайн»), реализация в регионах системы мер по выявлению и развитию таланта, работа общедоступных интернет-ресурсов по развитию творческих способностей школьников начинает сказываться не только на результатах Всероссийской олимпиады школьников, но и на росте количества высокобалльников ЕГЭ по математике. В данном контексте отметим существенный рост процентов выполнения заданий 16 и 19.

По результатам детального анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет и методических рекомендаций ФИПИ создано много печатных и электронных учебных материалов, разъясняющих вопросы выполнения заданий второй части КИМ; в ряде регионов приняты региональные программы развития математического образования; проект «Я сдам ЕГЭ» привел к существенному росту результатов участвующих регионов, так как построен не на прорешивании вариантов прошлых лет, а на системном изменении преподавания в сторону индивидуальных траекторий развития каждого школьника.

Рост общественного запроса на качественное математическое образование, повышение роли математической грамотности как общественно значимого фактора проявилось в повышении востребованности ресурсов для самостоятельного дополнительного математического образования. Например, в наиболее популярных диагностических системах зарегистрировались и выполняли тренировочные работы более 80% участников ЕГЭ 2019 г. профильного уровня, что позволило существенно снизить долю технических, вычислительных ошибок при выполнении заданий с кратким ответом.

Нельзя не отметить позитивного влияния актуальной экзаменационной модели ОГЭ на результаты ЕГЭ: включение несколько лет назад в КИМ ОГЭ практико-ориентированных заданий позволило выстроить единую систему требований в оценке качества математического образования. Включение в ОГЭ в качестве обязательного для преодоления аттестационного порога блока заданий по геометрии существенно сказалось на росте результатов выполнения заданий по геометрии в ЕГЭ.

Определенную роль также сыграло создание и массовое внедрение учебных материалов по экономической и финансовой грамотности в курсе математики, разработанных при поддержке Министерства финансов РФ и Банка России с привлечением ведущих специалистов в области математического и финансово-экономического образования. Этим обусловлен рост процентов выполнения заданий ЕГЭ по математике с экономическим содержанием.

Улучшение результатов ЕГЭ произошло как в целом по стране, так и во многих регионах. Участники экзамена демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями, выполняя задания, контролирующие следующие элементы содержания:

- проценты и доли;
- вычисления, округление;
- чтение информации с графиков и диаграмм;
- наглядная геометрия;
- несложные уравнения.

Задания 1–5 были выполнены со средним результатом более 90%; задания 6–12 – около 60%. До 80 вырос процент выполнения задания по планиметрии (№6). Особенно успешно выполняются задания на работу с четырехугольниками.

Задачу на определение производной по рисунку или чтение графика производной в 2019 г. выполнили более половины участников ЕГЭ профильного уровня.

Из заданий с кратким ответом повышенного уровня сложности успешнее всего были выполнены задачи вычислительного характера, в частности задача 10 на вычисления по формулам (2019 г. – более 80%, 2018 г. – около 67%).

Более двух третей участников экзамена 2019 г. успешно справились со стереометрической задачей 8.

Заметный рост произошел и в выполнении текстовой задачи 11: процент выполнения впервые превысил 70. При этому данное задание по-прежнему вызывает сложности у слабо подготовленных участников экзамена.

Среди заданий с полным решением наибольшее количество полных баллов, как и в 2018 г., получено в задании 13 (тригонометрическое уравнение). Отмеченная выше ситуация, когда большинство участников экзамена, нашедших путь решения, успешно доводили выполнение задания до конца, наблюдается в результатах выполнения заданий 13, 15 (логарифмическое неравенство), 17 (задача с экономическим содержанием). Это свидетельствует о росте математической культуры участников экзамена.

Задания по геометрии остаются при росте результатов выполнения наиболее трудными для участников экзамена. Наблюдается серьезный дисбаланс между результатами выполнения алгебраической и геометрической компонент второй части КИМ. Трудно предположить, что участники, успешно выполняющие задания 17 и 18, не в состоянии освоить приемы построения сечений или анализ планиметрической конструкции. Таким образом, налицо искусственно созданный перекос в сторону изучения алгебры, который закладывается в основной школе из-за недостаточного внимания к развитию геометрической интуиции и повышенного внимания к формально-логической стороне курса математики. Можно также предположить, что здесь сказывается недостаток геометрической подготовки учителей.

Рассмотрим выполнение экзаменационной работы ЕГЭ 2019 г. участниками с разным уровнем математической подготовки. Традиционно по результатам ЕГЭ по математике участники условно разбиваются на пять групп – с минимальной подготовкой, две подгруппы с базовой подготовкой, с повышенным и с высоким уровнем подготовки. Границы групп определяются, исходя из экспертной оценки соответствия выполнения экзаменационной работы требованиям вузов. В таблице 1 показаны условные границы групп.

Табл. 1. Группы по уровню подготовки (профильный уровень)

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0 – 6	7 – 10	11 – 13	14 – 22	23 – 32
Границы тестовых баллов	0 – 27	33 – 50	56 – 68	70 – 86	88 – 100

Результаты группы 1 с минимальной подготовкой, как и прошлые годы мало отличаются от результатов малоподготовленных групп участников базового экзамена (тестовые баллы 2 и 3). Численность (и абсолютная, и процентная) группы 1 существенно упала по сравнению с предыдущим годом (с 53,5 до 36,1 тыс. чел. и с 13,8 до 9,6%), но группа все равно многочисленна. Эти участники не могут, зная свой уровень подготовки, рассчитывать на успешный результат на профильном экзамене. Следовательно, участие их в профильном экзамене – явная недоработка школ, не сумевших верно сориентировать этих участников. Большинство из тех, кто не сдал профильный экзамен, или набрал ровно 6 первичных баллов, гарантированно сдали бы экзамен на базовом уровне в случае его выбора и организации соответствующего итогового повторения.

Участники группы 1, как правило, ограничиваются решением 10 – 12 заданий с кратким ответом и не приступают к задачам, требующим развернутых ответов. В большинстве своем это школьники, слабо мотивированные к изучению математики. Их участие в профильном экзамене чаще всего нецелесообразно. Администрациям школ, учителям, совместно с родителями, нужно вовремя ориентировать слабо подготовленных обучающихся 10–11 классов на базовый экзамен по математике.

Задачи по геометрии и на понимание объектов и методов математического анализа выполняются крайне плохо.

Группа 2 также уменьшилась по сравнению с 2018 годом (с 185,9 до 126,7 тыс. чел., то есть с 47,9 до 33,6%). Эту группу можно характеризовать, как тех, кто освоил базовый курс, но не приобрёл устойчивых навыков, что не позволяет им продолжать образование по технической специальности. Многочисленность группы 2 на профильном ЕГЭ по математике, к сожалению, объясняется скорее противоречивыми требованиями ряда вузов к абитуриентам: обязательный профильный экзамен, при этом относительно невысокие требования к математической подготовке.

В отличие от группы 1, группа 2 участников пытаются решить задания второй части, о чем свидетельствуют, например, результаты (около 9%) решения тригонометрического уравнения. Наличие вычислительных навыков позволяет им относительно успешно справиться с первой частью экзамена, но, начиная с задания 14, их результаты мало отличаются от результатов группы 1.

Группы 3–5 увеличились и в абсолютной численности и в процентном отношении.

Группа 3 (93,4 тыс. чел./ 24,7%) характеризуется как участники экзамена, успешно освоившие базовый курс математики и способные обучаться на технических специальностях большинства вузов, не предъявляющих очень высоких требований к математическим знаниям студенческого контингента. Эта группа участников выполняют задания 1–13 и 15, как правило, с небольшим количеством ошибок вычислительного характера.

Группа 4 – выпускники, имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности. В этом году эта группа превысила по численности группу 3 (110,1 тыс. чел. т.е. 29,2% участников). Эта группа – успешные конкуренты абитуриентам из группы 3 при поступлении в вузы. Более высокий общий уровень математической подготовки неизбежно вызовет изменения вступительных требований.

Наибольший относительный рост показала группа 5 (с 4,3 до 11,0 тыс. чел., т.е. 2,9%). Это выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к математической подготовке на технических и на фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов. Но даже в этой, наиболее подготовленной, группе по прежнему требуется внимание повышению качества геометрической подготовки. Например, задачу 16 решили лишь около 35% участников этой группы, в то время как выполнение задания 18 (уравнение или неравенство с параметром) выше 50%.

Выделим наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать.

Обучающихся с минимальной подготовкой целесообразно ориентировать на выбор базового экзамена, где у них есть все шансы на успех. Но при любом выборе обучающихся и их родителей важнейшее направление учебной работы – формирование устойчивых вычислительных навыков, в том числе при решении задач практико-ориентированной направленности.

У обучающихся с базовым уровнем подготовки, как правило, при сформированных вычислительных навыках превалирует алгоритмическая, шаблонная деятельность. Нередко подобные обучающиеся демонстрируют на экзамене неуверенность в правильности своих действий. При работе с такими обучающимися учителю следует обратить внимание на отработку стандартных навыков решения тригонометрических уравнений, типовых задач на нахождение площадей, углов и т.п.

Обучающиеся с повышенным уровнем подготовки нередко на экзамене испытывают существенный дефицит времени. Вероятно, этим можно объяснить резкое снижение результативности, начиная с задания 16. Учителям целесообразно больше работать над стереометрическими задачами. Выработка стандартных приемов построения сечений, применения небольшого круга стереометрических теорем и фактов, позволяет сократить время на решение задания 14 и сделать его одним из надежно решаемых.

Важная «зона роста» качества математических знаний обучающихся с высоким уровнем подготовки – геометрия. Необходимо повышать роль заданий по наглядной геометрии в 5-6 классах, делать акцент на развитие геометрической интуиции в 7-9 классах. Также заметный резерв роста имеет и логическое задание 19. Это особенно важно с учетом того, что заметное количество школьников с высоким уровнем математической подготовки активно участвуют в олимпиадах, а также планируют поступать на IT специальности.

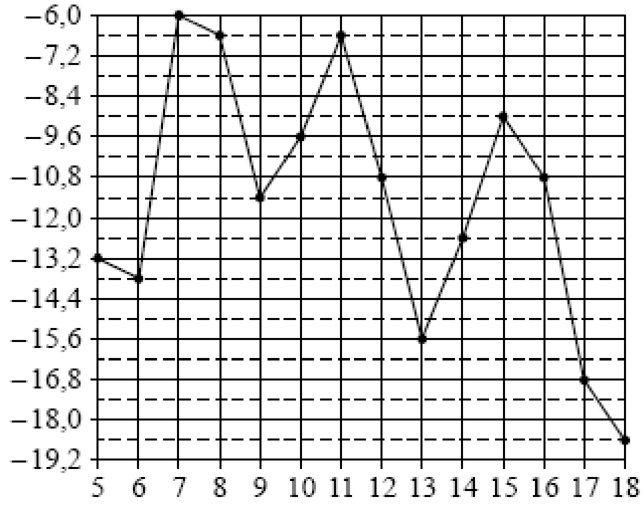
Проанализируем результаты выполнения некоторых заданий КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня.

В первую очередь следует отметить заметный рост выполнения заданий следующих типов. Задание 6 на применение свойства четырехугольника, в который вписана окружность, или на углы ромба. Задание 7 – по графику функции определить значение её производной в заданной точке. Задание 8 – вычислить объем цилиндра, если известен объем конуса, имеющего такую же высоту и совпадающее с цилиндром основание, или сравнить объемы цилиндров. Задание 9 на преобразование логарифмического выражения и вычисление его числового значения (получение правильного ответа требовало умения выполнять действия с логарифмами). Задание 10 на подстановку численных выражений в данную формулу с последующим вычислением (заметная доля ошибок связана с выполнением вычислений). Задание 11 на решение текстовой задачи на встречное движение автомобилей. Задание 12 на нахождение точки минимума (максимума) функции (ошибки были связаны в основном с неверным извлечения квадратного корня или неверной расстановки знаков производной на промежутках).

Для анализа и выработки рекомендаций отобраны задания, где наблюдались типичные, статистически заметные ошибки. В анализ были включены также задания, при выполнении которых наблюдалось статистически заметное отсутствие ответа, а также некоторое количество заданий, где проявившаяся ошибка была не очень массовой, но свидетельствовала о вероятных серьезных упущениях в методике преподавания математики.

Задание 2.

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Магадане с 5 по 18 ноября 1977 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода среднесуточная температура в Магадане была меньше $-14,4$ градуса Цельсия.

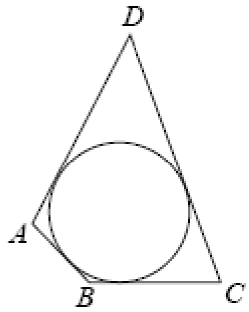


Комментарий. Популярный неверный ответ 11. К ошибке, вероятно, привело непонимание разницы между сравнением отрицательных чисел и их модулей. Другая возможная причина – невнимательное чтение условия. Количество таких ошибок заметно снизилось, но все же они встречаются. Частично эту ошибку провоцирует многократное «прорешивание» типичных прошлогодних вариантов вместо систематического повторения, что приводит к выработке стереотипов: участник экзамена бегло проглядывает тест этого простого задания, заранее посчитав, что он знает, что спрашивается.

Рекомендация. При организации подготовки не использовать однотипные варианты подряд и обращать внимание на это внимание школьников. Со слабыми обучающимися необходимо повторить сравнение отрицательных чисел.

Задание 6.

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=8$, $BC=10$ и $CD=37$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Комментарий. Неправильный ответ 29 мог получиться как разность известных противоположных сторон: 37 – 8. Логика такого действия становится понятной, если представить, что при подготовке учитель сразу выписывает на доске разность

$$AD = CD + AB - BC.$$

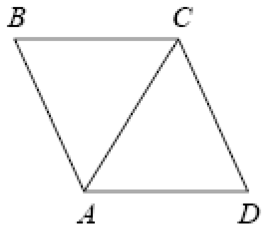
В этом случае смысл геометрической конструкции остается непонятым, а участник экзамена помнит только, что «из большего нужно вычесть меньшее» или что-то вроде этого.

Рекомендация. В несложных геометрических заданиях, подобных данному, не полагаться на очевидность, но начинать решение с выписывания соотношения в том виде, в котором оно повторяет геометрический факт:

$$AD + BC = AB + CD.$$

В таком случае сама запись способствует выработке понимания геометрического факта и его запоминания.

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



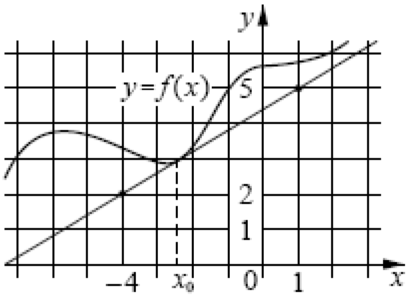
Комментарий. Неверный ответ 78 мог быть спровоцирован опорой на рисунок, где треугольник ACD внешне похож на равносторонний. Ответ 102 получается, если искать угол BCD или забыть разделить его пополам.

Рекомендации. Многие школьники за годы изучения геометрии не выработали верного отношения к геометрическому рисунку как изображению взаимного расположения элементов, но относятся к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. Задача учителя – разъяснить роль рисунка в задаче. При подготовке можно использовать методический прием – просить перерисовать рисунок, но исказить его при этом, изменив длины и углы.

Исключить ошибку, связанную с невнимательностью (ответ 102), труднее всего. Эту ошибку может допустить самый подготовленный и сильный школьник, и даже профессиональный математик. Такие ошибки выявляются только при перепроверке. Рекомендуем обращать внимание школьников на важность проверки своих ответов. К этому следует отнестись как к обязательной части выполнения любого задания.

Задание 7.

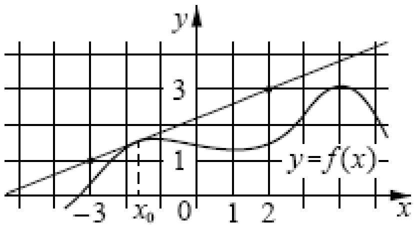
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Комментарий. Неверные ответы связаны с нахождением либо абсциссы, либо ординаты точки касания. Эти ответы дают школьники наугад, так и не усвоив, что такое производная и как ее увидеть на чертеже. За последние годы эту задачу стали решать лучше, но по-прежнему, понимание элементов анализа остаётся одним из слабых мест.

Рекомендация. Включать наглядные задачи по анализу в этап устного повторения в начале урока, в математические диктанты, иные малые формы повторения и закрепления материала без привязки к текущим темам. Здесь важна выработка умения, длительность и периодичность обращения с материалом для появления естественной привычки.

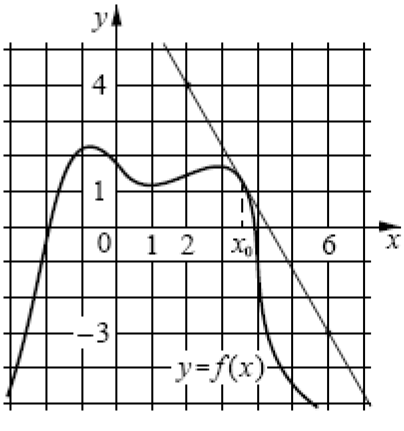
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Комментарий. Неверный ответ 2,5 получен при ошибке в вычислении тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике.

Рекомендации. Следует обращать внимание школьников на то, что прямоугольный треугольник – лишь вспомогательный инструмент. Суть задачи – найти отношение вертикального изменения функции к приращению аргумента.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

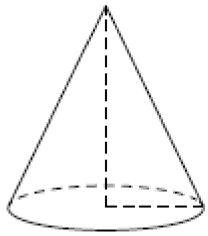


Комментарий. Типичный неверный ответ «1,75» – потеря минуса. Такая ошибка возникает у тех, кто механически воспроизводит алгоритм поиска производной с помощью прямоугольного треугольника, но не обращает внимания на направление касательной.

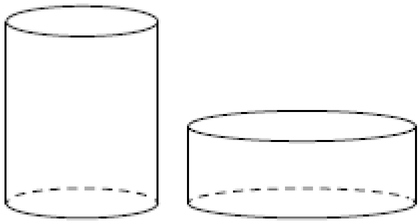
Рекомендация. Разбить решение задачи на два этапа. Первый этап: определение знака. Второй этап: определение модуля производной.

Задание 8.

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 5 раз, а высота останется прежней?



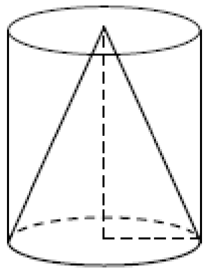
Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 16. У второго цилиндра высота в 4 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Комментарий. Ответ 5 в первой и 12 во второй задаче – типичные неверные ответы. Эта ошибка возникает тогда, когда школьник вместо формулы объема опирается на наглядные представления, но не обладает достаточным уровнем математической культуры для того, чтобы твердо понимать, что площадь основания увеличивается пропорционально квадрату увеличения радиуса.

Рекомендация. Относительно слабым школьникам, предпочитающим наглядный метод решения таких, задач следует настоятельно советовать решать задачу двумя способами – наглядным с последующей проверкой по формуле, добиваясь совпадения результатов при двух методах решения. С другой стороны, мы не рекомендуем пользоваться решением только по формуле, поскольку это вызывает множество других ошибок и не приводит к повышению надежности решения задачи.

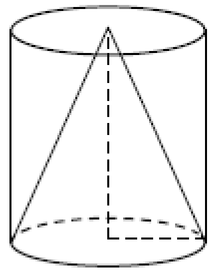
Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 18. Найдите объём конуса.



Комментарий. Неверный ответ 9 говорит, как и в предыдущем примере, об ошибке наглядного решения. Действительно, площадь осевого сечения конуса в два раза меньше площади осевого сечения цилиндра. Обучающиеся, давшие ответ 9, вероятно, перенесли это свойство на объемы, поскольку визуально объем на плоскости воспринимается через площадь фигуры.

Ошибочный ответ 54, как раз, напротив, вызван бездумным применением формулы с ошибкой и без попытки осмыслить результат.

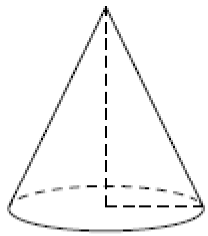
Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 6. Найдите объём цилиндра.



Комментарий. Аналогичная ошибка описана в разборе предыдущей задачи. При опоре на наглядные представления, участники умножили объем не на 3, а на 2, как будто это площадь сечения.

Рекомендация. Следует обращать внимание школьников на то, что в трёхмерном пространстве объемы визуально сравнить труднее, чем площади на плоскости. Стоит рассказать, что эта задача является частным случаем известной задачи Архимеда: объем вписанного в цилиндр шара в полтора раза, а объем вписанного конуса в три раза меньше объема цилиндра. Эту знаменитую задачу можно рассматривать не только в курсе стереометрии, но также в основной школе в курсе наглядной геометрии, в качестве материала для математических газет и т.п.

Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в 15 раз, а радиус основания останется прежним?



Комментарий. Так же как и в предыдущем примере, ошибка, приведшая к ответу 5, вызвана неверным применением формулы. Отметим, что ошибки, связанные с неправильным вычислением по формуле, более массовые, чем ошибки, связанные с неверной оценкой изменения площади или объема из общих соображений размерности. Коэффициент 1/3, присутствующий в формуле объема конуса, был истолкован как указание разделить 15 на 3. Строго говоря, обучающиеся, давшие ответ 5, не применяли формулу объема конуса, а «пользовались коэффициентом из этой формулы».

Рекомендация. Задачу можно решать из наглядных соображений: конус стал ниже в 15 раз, значит, его объем стал меньше в 15 раз. Можно по формуле. Но смешивать эти два способа не нужно – это всегда чревато ошибками. Рекомендация – использовать при подготовке оба способа, добиваясь совпадения ответов.

Задание 9.

Найдите значение выражения $8\log_{\sqrt[8]{14}} 14$.

Комментарий. Ошибка связана с неверным применением свойства степеней. Вероятно, было верно сделано первое преобразование: $\sqrt[8]{14} = 14^{1/8}$, а на втором этапе решения показатель степени 1/8 был вынесен как множитель перед логарифмом.

Найдите значение выражения $16\log_7 \sqrt[4]{7}$.

Комментарий. Скорее всего, первый этап решения был верным: $16 \cdot \frac{1}{4}\log_7 7$.

Последующая ошибка – плод инертности мышления. Вместо деления 16 на 4, участники экзамена извлекли из 16 корень 4-й степени.

Найдите значение выражения $\frac{\log_8 81}{\log_8 3}$.

Комментарий. Типичная ошибка – «сокращение логарифмов». Также обучающиеся, не имеющие достаточной практики работы с логарифмами (по части УМК они появляются лишь в конце 11 класса), действовали наугад.

Найдите значение выражения $\log_{0,2} 50 - \log_{0,2} 2$.

Комментарий. Ответ 25 – результат классической ошибки «промежуточный ответ»: $\log_{0,2} 50 - \log_{0,2} 2 = \log_{0,2} 25$. Выполнив в уме эту операцию, участник экзамена записывает 25 в ответ. Ответ 48 – результат еще более классический: незнание свойств логарифмов.

Общие рекомендации. Ликвидация ошибок при применении свойств логарифмов – процесс, требующий длительного времени и привыкания. Школа давно имеет в своем арсенале необходимые средства для интенсификации привыкания и выработки механических навыков – устный счет в начале урока, контрольные, диктанты, дополнительные вопросы при ответе у доски и т.п. Все эти инструменты следует использовать в полной мере для выработки технических навыков работы с корнями, степенями, логарифмами, тригонометрическими функциями и т.п.

Задание 10.

В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет $R_1 = 16$ Ом. Параллельно с ней в розетку предполагается подключить тостер, сопротивление которого R_2 (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R вычисляется по формуле $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 14 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление тостера. Ответ дайте в омах.

Задание 11.

Расстояние между городами A и B равно 510 км. Из города A в город B со скоростью 70 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Комментарий. Отсутствие ответа начинает встречаться с задачи 9 или 10 ежегодно. Это значит, что заметная доля участников экзамена либо не доходит до этих задач, либо пропускает их, считая трудоёмкими. Как правило, это те школьники, которые не рассчитывают приступить и ко второй части.

При этом умение решать текстовые задачи значимо не само по себе, а как важнейший элемент развития умения применять математику, строить и использовать математические модели. Следует уделять большее внимание этим темам в рамках школьного курса.

Задание 11.

Два велосипедиста одновременно отправились в 108-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий. Значительное количество участников экзамена указали в ответе скорость не первого, а второго велосипедиста, которую, вероятно, многие приняли «за икс» руководствуясь старым правилом считать переменным в уравнении меньшую из неизвестных величин. Ошибка в отсутствии последнего этапа решения.

Задание 11.

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий. Около 10% участников указали в ответе скорость при движении из А в В. Невнимательность – наиболее трудно искоренимая проблема на экзамене.

Общие рекомендации. От ошибок по невнимательности спасает только перепроверка ответов как заключительная и обязательная часть экзамена. Следует говорить школьникам, что проверку ответа не нужно делать сразу после решения задачи – инертность мышления приведет к тому, что ошибка будет сделана вторично. Наиболее эффективный путь – проверка ответов перед тем, как сдать работу или по окончании определенного этапа (части, группы заданий и т.п.). Обязательно следует проверять задачу «на здравый смысл». Обнаружив при повторном чтении, что спрашивалась скорость на обратном пути, которая на 8 км/ч выше вчерашней, школьник заметит, что ответ 8 неверен, ибо это означало бы, что вчера велосипедист ехал со скоростью 0 км/ч.

Задание 12.

Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Комментарий. Вероятно, сделав замену $y = \sqrt{x}$ при решении уравнения $15 - 3\sqrt{x} = 0$, многие забыли вернуться к переменной x. В прежние годы наиболее массовой ошибкой в подобных заданиях было указание в ответе значения функции в точке максимума. Количество таких ошибок существенно снизилось.

Рекомендация. Данную ошибку, вероятно, следует расценивать, как ошибку по невниманию. Минимизация числа ошибок по невнимательности – каждодневный труд учителя: устный счет, проверочные работы, математические диктанты и другие формы.

Задание 12

Найдите точку максимума функции $y = 6 + 12x - x\sqrt{x}$.

Комментарий. Массовые неверные ответы 6 и 12 являются попыткой «угадывания», приводя в ответе числа из условия. Ответ 0 мог получиться в результате замены $\sqrt{x} = y$ без дальнейшего исследования найденных двух точек.

Рекомендации. Важно отметить, что процент выполнения этой задачи ниже, чем предыдущей - при решении задачи, с записью $x^{3/2}$ участники экзамена ошибались при нахождении производной реже чем при записи в условии $x\sqrt{x}$. На этот аспект следует обратить серьезное внимание как при итоговом повторении и при обучении вычислению производных.

Задание 12

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 19$.

Комментарий. Типичная ошибка связана с отсутствием анализа или ошибками в анализе двух точек, полученных при нахождении нулей производной.

Рекомендация. Следует давать больше задач, где нужно исследовать нули производной, уделять внимание развитию наглядных представлений о связи поведения функции и ее производной. В частности, развитие умения уверенно выполнять задание 7, позволяет существенно снизить риск ошибки в задании 12.

2. ЕГЭ по математике базового уровня

Вариант экзаменационных материалов по математике состоит из 20 заданий с кратким числовым ответом или ответом в виде последовательности цифр.

Структура КИМ базового уровня, практически неизменная с 2015 года, предназначена для проверки базовых умений, включая бытовые расчеты, наглядную геометрию, владение приемами вычислений и нахождения значений элементарных функций. Вариант содержит две задачи, требующие логического анализа и построения предложенной числовой конструкции.

Задания практико-ориентированного характера составляют основу экзамена и охватывают широкий круг объектов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, чтение графиков, бытовые расчеты, оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий в простых ситуациях, оценка и прикидка.

Несмотря на отсутствие изменений в структуре и содержании КИМ результаты участников экзамена в текущем году существенно отличаются от результатов прошлого года. Основной причиной послужило изменение регламента, согласно которому в 2019 г. участник мог выбрать лишь один из уровней. Это нововведение привело к вымыванию из базового экзамена значительного числа выпускников, которые прежде планировали использовать его как «пробный» перед профильным. Результатом явилось некоторое общее ослабление когорты участников базового экзамена, проявившееся как в изменении среднего балла, так и в изменении формы распределения первичных баллов. При этом результаты наименее подготовленных выпускников практически не изменились по сравнению с прошлым годом, поскольку на профильный экзамен перешли преимущественно подготовленные выпускники. Таким образом, наблюдались компенсирующие процессы, связанные с общим повышением уровня подготовки, более осознанным определением образовательной траектории и, возможно, иными факторами.

По итогам экзамена базового уровня наиболее высокие результаты получены при выполнении практико-ориентированных заданий на чтение диаграмм и графиков (задание 11), таблицы (задание 12) и сопоставление величин (задание 9). Эти задания выполняют 90-95% участников экзамена.

Особую тревогу вызывает низкий процент выполнения практико-ориентированного стереометрического задания 13 (выполнение около 40%).

Задание на вычисление вероятности события (10) выполнено более 70% участников. Предположение об освоении значительным числом учителей методики преподавания вероятности подтверждается.

Помимо стереометрической задачи 13, хуже других решены задачи 14–16, 19 и 20. Задача 14 на наглядное представление о производной. Геометрические задачи 15 и 16 на соотношения в прямоугольном треугольнике и расчет элемента фигуры в пространстве представляют трудности для участников экзамена базового уровня, как и для участников экзамена профильного уровня. Задачи 19 и 20 требуют организованного перебора вариантов или логического анализа. Выполнение этих заданий (около 65 и 29% соответственно) можно считать удовлетворительным.

Рассмотрим выполнение экзаменационной работы участниками с разным уровнем математической подготовки. По результатам базового экзамена естественным образом выделяются четыре группы участников, получивших разные тестовые баллы от 2 до 5 (табл. 2).

Табл. 2. Группы по уровню подготовки (базовый уровень)

Группа	1	2	3	4
Границы первичных баллов	0 – 6	7 – 10	11 – 13	14 – 22
Тестовый балл	2	3	4	5

Группа 1 – это совокупность участников с наиболее низким уровнем математической подготовки, не обладающих приемлемыми навыками счёта и чтения. Доля 2,8% участников базового экзамена.

Группа 2 – участники с низким уровнем математической подготовки. Они, как правило, выполняют задания, требующие прямого подсчета, но ошибаются в задачах на проценты. За задания, требующие знания элементов содержания 10 – 11 класса, часто не берутся. Доля 19,8%.

Группа 3 имеет базовые математические знания, нужные в бытовых расчетах, жизненных ситуациях. Слабое выполнение последних заданий КИМ, требующих логических построений, знания функций, изученных в старших классах, компенсируется устойчивыми вычислительными навыками и решением базовых текстовых задач. Доля 39,9%.

Группа 4 – наиболее подготовленные участники базового экзамена. Часть из них может претендовать на средний или даже высокий балл на профильном экзамене. Их выбор базового экзамена в основном осознанный – они планируют продолжение образования в областях, не связанных с математикой. Однако не исключено, что некоторая часть этой группы состоит из участников, которые выбрали базовый экзамен либо по собственной ошибке, либо будучи неверно сориентированными. Доля 37,5%.

Группа 1 имеет явные особенности в выполнении отдельных заданий. Например, задача 5 (вычисления с корнями и степенями) у этой группы вызывает затруднения по сравнению с другими задачами (около 15% выполнение). Группы 2 и 3 эту задачу решают не хуже других задач, а в группе 4 эта задача имеет почти стопроцентное выполнение.

Группа 1 хорошо справляется (около 79%) только с задачей на установление соответствия между величинами и их значениями при условии, что величины отличаются друг от друга на порядок. Наибольшие трудности – в наглядной стереометрии и тригонометрии (около 2 и 1% выполнения соответственно). Можно сделать вывод о том, что значительная часть участников, получивших тестовый балл 2, не знакома с математическими фактами курса средней школы.

Группа 2, в целом испытывая те же трудности, что и группа 1, все же выполняет большую часть задач на уровне 50–60%. Наиболее низкие результаты – опять же по геометрии (около 7%). Другие массовые особенности при анализе агрегированной статистики и вееров ответов не выявляются.

В группе 3 провалы в геометрии не столь заметны, но также имеются. И даже в группе 4 задача 13 (наглядная стереометрия) вызывает определенные трудности – верно решили задачу 72%, и это самый низкий результат по всем задачам, за исключением последней, где требуются нестандартные рассуждения.

Выделим наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать.

Группа 1. Эту группу можно кратко охарактеризовать, как выпускников, имеющих слабую математическую подготовку, в том числе плохо умеющих считать. Безусловно, внимание учителя и родителей должно быть направлено, в первую очередь, на развитие устойчивых навыков бытового счета, умения находить часть от числа и число по его части. Вряд ли есть смысл глубоко изучать с такими детьми в старшей школе тригонометрические и другие функции, когда основная проблема ученика – полное отсутствие базовой арифметической подготовки. Необходимо своевременно (не позднее чем в начале учебного года) выявлять учеников, потенциально входящих в такую группу, и организовывать индивидуализированную подготовку, в том числе по ликвидации пробелов начальной и основной школы.

Говоря о группах 2 и 3, заметим, что помимо слабого решения геометрических задач эти участники ЕГЭ не имеют серьезных провалов. Недостаточная отработка вычислительных навыков и невнимательность в чтении условия – основная проблема этой группы участников. Здесь также следует добиваться отработки уже имеющихся навыков, прежде чем браться за более сложные умения или новые объекты. С другой стороны, важно обратить внимание на решение типовых задач по геометрии, не отказываться от изучения геометрии ради алгебры. Но вместо рассмотрения теорем и решения абстрактных задач лучше сосредоточиться на простых практико-ориентированных задачах, в которых фигурирует объем цилиндра, наглядное деление фигуры на две части, видимое подобие, используются простые планы и чертежи на клетчатой бумаге.

Группа 3 наиболее массовая. Учитель обычно хорошо умеет работать именно с такими школьниками. Повторив все рекомендации, актуальные для группы 2, отметим, что здесь учитель может опираться на имеющие вычислительные навыки, следовательно, нужно давать больше задач на оценку и прикидку, на сопоставление результата со здравым смыслом и жизненным опытом при решении не только практико-ориентированных, но и типовых задач школьной геометрии и алгебры.

Несмотря на наличествующие вычислительные навыки, обучающиеся с сопоставимой с группой 3 подготовкой испытывают некоторый дефицит опыта в преобразовании логарифмов, корней и степеней. Следовательно, при подготовке к ЕГЭ целесообразно чаще включать несложные преобразования функций в тренировочные материалы с целью выработать навык с помощью многократного повторения.

Группа 4 – пограничная между базовым и профильным экзаменами. Вероятно, значительная часть участников экзамена, попавших в эту группу, в состоянии успешно сдать профильный экзамен. Учителю важно понимать, насколько разумен выбор базового экзамена для потенциально сильного ученика.

Для выработки конкретных рекомендаций был проведен анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике базового уровня.

В группу заданий, с которыми участники экзамена справились несколько хуже, чем с другими, но на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, так и задания, «перешедшие» из основной школы: нахождение значение числового выражения (задание 1), преобразование степенного выражения (задания 2), решение практической задачи «с процентами» (задача 3), преобразование иррационального выражения (задания 5), решение квадратного уравнения (задание 7), решение планиметрической задачи на вычисление площади прямоугольника (задание 8), решение вероятностной задачи (задание 10), на работу с информацией, представленной в таблице (задание 12), решение планиметрической задачи на решение прямоугольного треугольника (задание 15), решение стереометрической задачи на объем круглого тела (задача 16), на задание с числовыми неравенствами (задача 17), на задание с числами (задание 19).

Низкий уровень успешности продемонстрировали участники экзамена при выполнении практико–ориентированного задания по стереометрии на вычисление объема тела (задание 13) и задание на построение простейшей математической модели (задание 20).

Для анализа отобраны задания, где наблюдались массовые неверные ответы, которые дали не менее 5% участников. В анализ были включены также задания, где наблюдалось массовое отсутствие ответа, а также некоторое количество заданий, где проявившаяся ошибка была не очень массовой, но свидетельствовала о проблемах в знаниях выпускников.

Задание 4.

Ускорение тела (в $м/с^2$) при равномерном движении по окружности можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения (в $с^{-1}$), а R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите a (в $м/с^2$), если $R = 7$ м и $\omega = 5\ с^{-1}$.

Комментарий. Неверный ответ 0,28 мог получиться при делении 7 на 25. На мысль о делении могла навести размерность угловой скорости $с^{-1}$ или размерность ускорения $м/с^2$. То есть здесь попытка найти трудности, где их нет. Неверный ответ 35 получается при умножении 7 на 5. Здесь потерян квадрат.

Рекомендации. Умение следовать простому алгоритму, заданному формулой, является важным общекультурным умением. Следует посвятить некоторое время выработке умений работы с формулами и с единицами измерения.

Задание 5.

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

Комментарий. Ошибка «промежуточного ответа» – 18 поделили на 2, а про корень «забыли».

Рекомендации. Здесь может помочь выработка навыка в основной школе, который к 11 классу должен быть уже устойчивым. Также требуется постоянное включение подобных заданий в итоговое повторение, малые формы контроля, домашние работы и т.п.

Задание 6.

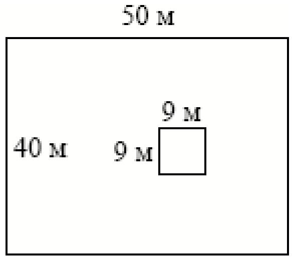
Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 310 рублей в воскресенье?

Комментарий. Неверный ответ 8, вероятно, получен округлением в меньшую сторону частного 310 и 35. При этом смысл специального предложения не учтен.

Рекомендация. При подготовке обучающихся со слабыми знаниями к базовому ЕГЭ нужно учитывать, что некоторые из них плохо ориентируются в жизненных ситуациях и испытывают трудности с пониманием текста (смысловым чтением), причем не только в задачах по математике, но и в рекламных объявлениях в магазине. Здесь могло бы помочь моделирование на уроке типовых ситуаций покупки товаров: скидки, наценки, акции и т.п.

Задание 8.

Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 50 м. Дом, расположенный на участке, имеет на плане форму квадрата со стороной 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом. Ответ дайте в квадратных метрах.

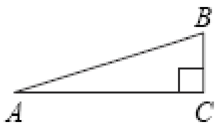


Комментарий. Неверный ответ 119 мог получиться при вычитании площади дома из площади 200м^2. Площадь 200 могла получиться из площади 2000 потерей одного нуля. Ошибка чисто механическая. Ликвидация таких ошибок требует, в том числе развития умения проверять себя.

Рекомендация. Еще раз обращаем внимание на подготовку школьников к технике проверки вычислений и соответствия ответа здравому смыслу и условию задачи.

Задание 15.

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, сторона BC равна 15. Тангенс угла A равен $\frac{5}{12}$. Найдите длину стороны AB.



Комментарий. Неверные ответы связаны с незнанием тригонометрических функций и с попытками угадывания ответа.

Рекомендация. При подготовке школьников, слабо владеющих геометрией и тригонометрией, к решению прямоугольных треугольников, можно выбрать следующий алгоритм.

1) Решая прямоугольный треугольник, последовательно находи стороны и углы, которые можно найти непосредственно из условия или из уже найденных ранее.

2) Найдя все стороны и углы, выпиши в ответ нужный элемент.

В данном случае (задание 15) можно сначала было найти второй катет, а затем по теореме Пифагора – гипотенузу.

Задание 10.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 9 прыгунов из России и 12 прыгунов из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать прыгун из Китая.

Комментарий. Неверный ответ 0,25 мог быть получен делением числа 3 (порядковый номер спортсмена) на 12 (число прыгунов из Китая). Такой ответ говорит о том, что выпускник не понимает смысла данных чисел и своих действий.

Рекомендация.

При решении задач на поиск вероятности в опытах с равновозможными исходами следует придерживаться простого методического алгоритма.

1) Элементарным событием является выбор спортсмена для выступления третьим. Всего спортсменов $N = 50$.

2) Событию «для выступления третьим выбран спортсмен из Китая» благоприятствует $M = 12$ выборов спортсмена.

3) Вероятность равна $\frac{M}{N} = \frac{12}{50} = 0,24$.

Игнорирование этого алгоритма или применение к разным задачам разных алгоритмов не позволяет сформировать понимание о единой общей природе и схеме таких задач и дезориентирует школьника, который начинает искать подходящие числа, чтобы поделить одно на другое.

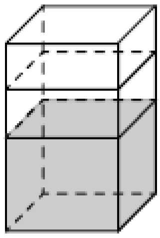
В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 15 насосов подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос **не подтекает**.

Комментарий. Типичная ошибка связана с невнимательным чтением условия. Вместо того чтобы найти вероятность выбрать не подтекающий насос, найдена вероятность противоположного события «насос подтекает». Второе действие либо забыто, либо условие прочтено не полностью.

Рекомендация. Как уже неоднократно отмечалось, такие ошибки неизбежны, если участник экзамена не научен внимательному анализу текста условия и систематической проверке своих ответов и вычислений.

Задание 13.

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,6 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



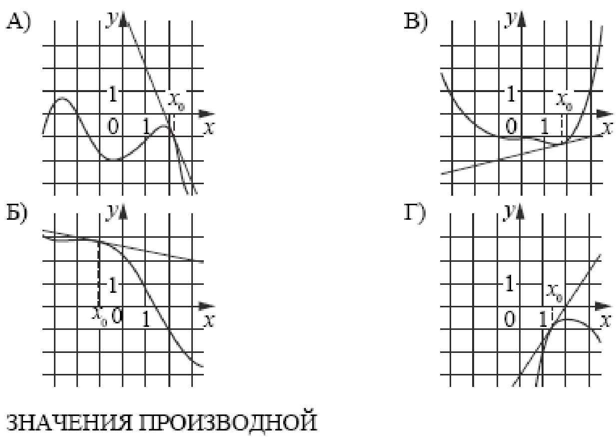
Комментарий. Эффект «промежуточного ответа». Найдя суммарный объем воды и детали, участник записал в ответ его вместо разности. Ошибка массовая и может проявиться в любой момент в любой задаче.

Рекомендация. В базовом экзамене, где у участников нет дефицита времени, этап проверки и перепроверки решений и ответов приобретает особую значимость. Необходимо учить школьников выполнять проверку ответов с точки зрения здравого смысла, полноты проведенных действий. Нужно проверять, верно ли переписано число с черновика и т.п. Наиболее эффективной является отложенная проверка, выполненная не сразу же после решения задачи, а спустя некоторое время.

Задание 14.

На рисунках изображены графики функций и касательные, проведённые к ним в точках с абсциссой x_0. Установите соответствие между графиками функций и значениями производной этих функций в точке x_0.

ГРАФИКИ



ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1) $-0,2$
2) $-2,5$
3) 1,5
4) 0,25

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Комментарий. Типичные ошибки связаны с неверным сравнением модуля производной с единицей. Эту ошибку мы разбирали на примере задания профильного экзамена.

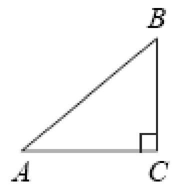
Рекомендация. Разумно решение такой задачи разбить на три этапа. Первый: определение знака производной; второй: сравнение наклона касательной с углом 45° позволит сравнить модуль производной с единицей. Необходимые пометки можно делать прямо на чертеже в КИМ. Третий этап: поиск производной по клеткам или установление соответствия.

Задание 7.

Найдите корень уравнения $\log_{22}(4x-33)=\log_{22}3$.

Задание 15.

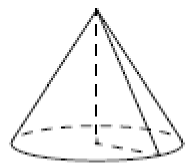
В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=\sqrt{29}$, $BC=2$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



Общий комментарий. Часть участников базового экзамена «пугается» логарифмов, тригонометрических функций. Можно предположить, что около 10% участников базового экзамена по тем или иным причинам не изучали логарифмы в школе, а около 14% не знакомы (либо прочно забыли) тригонометрию прямоугольных треугольников.

Задание 16.

Объём конуса равен 24π, а радиус его основания равен 2. Найдите высоту конуса.

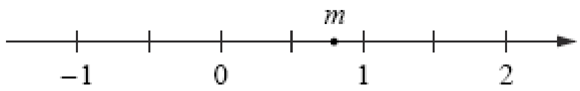


Комментарий. Неверный ответ 12 получен, скорее всего, не за счет ошибочного коэффициента в формуле объема конуса, а как результат деления 24 на 2. Ответ 2 – результат некритического использования пояснительного рисунка в качестве точного чертежа. В обоих случаях участник пытался дать хоть какой-нибудь ответ, не зная, как решить задачу.

Рекомендация. Обратить внимание на роль рисунка в изучении геометрии. Упражнение состоит в том, чтобы перенести рисунок в тетрадь, изменив соотношения величин. Цель – понять, что рисунок в геометрии облегчает понимание взаимного расположения элементов, но не является чертежом с указанными размерами.

Задание 17.

На координатной прямой отмечено число m.



Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $4-m$	1) $[-3;-2]$
Б) m^2	2) $[0;1]$
В) $\sqrt{m+1}$	3) $[1;2]$
Г) $-\frac{2}{m}$	4) $[3;4]$

Комментарий. Трудность этого задания оказалась в понимании того, как ведут себя квадратный корень и квадрат числа меньшего или большего единицы. На это нужно обратить внимание. Квадрат числа не всегда больше самого числа, а корень – не всегда меньше. Это общее трудное место для восьмого класса.

Рекомендация. Включать подобные задачи в устный счет в начале уроке, контрольные работы и другие малые формы контроля.

Задание 19.

Найдите трёхзначное натуральное число, большее 800, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Комментарий. Задание творческое, конструктивное, требующее не столько фантазии, сколько тщательного системного подбора основанного на владении свойствами целых чисел. Если не использовать алгебраические соображения, то одно какое-нибудь число, удовлетворяющее всем условиям, можно найти минут за 5–10 простым перебором. К сожалению, многие школьники, понимая, что требуется в задаче, не способны проверить выполнение всех условий. В этой задаче непроверенным условием оказалось условие «делится на каждую свою цифру».

Рекомендация. Работа над этой ошибкой в чем-то схожа с работой над ошибками в задании 4 и им подобным: нужно тщательно и систематически последовательно проверить все условия, которые даны. Собственно, нужно обратить внимание на умение выполнять организованный последовательный перебор вариантов, а позже – перебор условий, которым должно удовлетворять число-кандидат. Умение решать такие задачи формируется путем развития «чувства числа», начиная с начальной школы.

Задание 20.

В доме всего десять квартир с номерами от 1 до 10. В каждой квартире живёт не менее одного и не более трёх человек. В квартирах с 1-й по 8-ю включительно живёт суммарно 10 человек, а в квартирах с 7-й по 10-ю включительно живёт суммарно 10 человек. Сколько всего человек живёт в этом доме?

Комментарий. Неверный ответ 20 получен сложением 10 и 10. Намного более интересен ответ 18, где школьники решили, что нужно удалить из квартир 7 и 8 «лишнего жильца», посчитанного дважды. В этом есть смысл, но только нужно учесть, что «лишних жильцов» в квартире может быть более одного.

Рекомендация. Развивать умение читать условие задачи, умение проводить систематические перебор вариантов, а также проверку полученного ответа.

Результаты экзаменов по математике позволили выявить ряд проблем, на которые теперь необходимо перенести акцент в обучении математике.

Уникальная в мировом масштабе открытость и прозрачность ЕГЭ в России, в частности, наличие открытых банков заданий позволило активно внедрить онлайн тренажеры, которые позволили резко повысить эффективность итогового повторения и подготовки к экзамену с учетом индивидуальных образовательных траекторий каждого участника экзамена. Это могло обусловить снижение количества допущенных участниками ЕГЭ вычислительных ошибок при выполнении заданий с кратким ответом, ошибок, связанных с неправильным пониманием условия математической задачи. Помимо увеличения качества выполнения заданий с кратким ответом, заметен рост процента выполнения наиболее типовых заданий с развернутым ответом (задания 13 и 15).

Рост результатов по другим заданиям с развернутым ответом заметен, но он меньше, так как для успешного их решения необходима не просто хорошая математическая «база», но и умения проводить логические рассуждения, четко и грамотно излагать свои мысли. Для формирования этих умений необходимо участие квалифицированного учителя, такую подготовку невозможно осуществлять в режиме тренажера. Хорошо заметны успехи выпускников образовательных организаций из регионов, где уделяется большое внимание реализации программ углубленного изучения математики, сопровождению процесса обучения адресным повышением квалификации и методической поддержкой учителя.

Повышение успешности решения типовых вычислительных геометрических задач существенно опережает рост решения задач, требующих «видения геометрических фигур», развития геометрической интуиции. Это является следствием перекоса акцентов в преподавании геометрии в основной и старшей школе на заучивание определений и решение большого количества технических вычислительных задач, вместо решения содержательных геометрических задач, развивающих видение геометрических конструкций.

По прежнему существенным резервом остается неумение ряда выпускников использовать математические знания и математический аппарат при решении практических задач.

В 2020 г. не планируется изменений в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного и базового уровней.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы с сайта ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2020 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ;
- методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015–2018 гг.);
- журнал «Педагогические измерения»;
- Youtube-канал Рособрнадзора (видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ 2016 – 2019 гг.), материалы сайта ФИПИ (http://fipi.ru/ege-i-gve-11/daydzhest-ege).

Приложение

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2019 г. по математике (профильный уровень)

Анализ надежности экзаменационных вариантов по математике (профильный уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надежность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (профильный уровень) – 0,8.

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень слож-ности задания	Макси-мальный балл за выполнение задания	Средний процент выпол-нения
1	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	Б	1	95,5
2	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	3.1, 6.2	3.1–3.3, 6.2.1	Б	1	95,5
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1	5.1, 5.5	Б	1	93,3
4	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	95
5	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	Б	1	93,6
6	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.4, 5.5.1–5.5.5	Б	1	80,6
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1–4.3	Б	1	61,5
8	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2–5.5	Б	1	66,7
9	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	П	1	74,8
10	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1–6.3	2.1, 2.2	П	1	86,9
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	П	1	72,7
12	Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	П	1	60,8

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень слож-ности задания	Макси-мальный балл за выполнение задания	Средний процент выпол-нения
13	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2	П	2	45,3
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	2	5,6
15	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	П	2	20,8
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.1	П	3	2,7
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	15,4
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	4,2
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4	В	4	3,2

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2019 г. по математике (базовый уровень)

Анализ надежности экзаменационных вариантов по математике (базовый уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надежность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (базовый уровень) – 0,84.

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки	Коды прове-ряемых элементов содержания	Уровень слож-ности задания	Макси-мальный балл за выполне-ние задания	Сред-ний процент выпол-нения
1	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.1.1, 1.1.3, 1.4.1	Б	1	86,1
2	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.1.3, 1.1.4, 1.4.2	Б	1	84
3	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.3	1.1.3	Б	1	84,8
4	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.2	1.4.1–1.4.3	Б	1	86,9
5	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.4.3–1.4.5	Б	1	83,4

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки	Коды проверяемых элементов содержания	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний процент выполнения
6	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	1.4.1	Б	1	82,6
7	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1.1–2.1.6	Б	1	69,9
8	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.3, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5	Б	1	76,2
9	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	2.1.12, 6.3.1	Б	1	95,4
10	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3.1	Б	1	71,8
11	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.2, 3.1	6.2.1, 3.1.3	Б	1	95,5
12	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 6.1, 6.2	1.4.1	Б	1	90,3
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.3.1–5.3.5, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	38,4
14	Уметь выполнять действия с функциями	3.3, 6.2, 6.3	3.1.1–3.1.3, 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6, 4.1.1, 4.1.2, 6.2.1	Б	1	62,4
15	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.1	5.1.1–5.1.5, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5	Б	1	53,9
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.3.1–5.3.3, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	53,5
17	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3, 6.1	2.2.1–2.2.5	Б	1	69,2
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.3	2.1.12	Б	1	84,8
19	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.4.1, 1.4.2	Б	1	64,2
20	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	1.4.1, 1.4.2, 2.2.2	Б	1	27,8